INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA, ESIME ZACATENCO

SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

POSGRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO DE PROPÓSITO ESPECIFICO DE MATEMÁTICAS

PROFESOR. MOHAMED BADAOUI

Índice general

Notación Básica

- Sea E un conjunto. $x \in E$ significa que x es un elemento de E

  Por ejemplo $x \in \mathbb{R}$ significa que x es un número real

- Sean E y E'. La notación $E \subset E'$ significa que E está contenido en E' ó bien E es un subconjunto de E'.

- Sean E y E' dos conjuntos. Entonces el conjunto de todas las parejas se denota por:

$$E \times E' = \{(x, y) \text{ tal que } x \in E \text{ y } x' \in E'\}$$

- La intersección de E y E' denotada por $E \cap E'$, es el conjunto de elementos que están en E y E' a la vez.

- La unión de E y E' denotada por $E \cup E'$, es el conjunto de elementos que pertenecen a E o a E'.

- $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ "el espacio de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$"

- $\mathscr{P}[0, 1]$ " Espacio de todos los polinomios definidos en $[0, 1]$"

- $\mathscr{P}$ ó $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ " Espacio de todos los polinomios definidos sobre $\mathbb{R}$"

- $\mathscr{P}_n[0, 1]$ "Espacio de todos los polinomios de grado $\leq n$"

- $C([0,1])$ "Espacio de todas las funciones continuas sobre $[0,1]$"
- $C(\mathbb{R})$ "Espacio de todas las funciones continuas sobre $\mathbb{R}$"
- $C^1(\mathbb{R})$ "Espacio de todas las funciones derivables y con derivada continua"
- $C^i(\mathbb{R})$ "Espacio de todas las funciones $i-$veces derivable, en donde la i-ésima derivada es continua"
- $C^\infty(\mathbb{R})$ "Espacio de todas las funciones indefinidamente derivables en donde todas las derivadas son continuas"
- $C^\infty(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C^i(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
- $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ " El espacio de todas las matrices m-filas y n-columnas con coeficientes reales"

Capítulo 1

ESPACIOS VECTORIALES

1.1. Definición y propiedades

La siguiente definición consiste en enunciar los diez axiomas que debe satisfacer un conjunto muy importante en Álgebra lineal llamado Espacio vectorial. En lo que sigue se adopta la siguiente terminología. Los elementos de K se llaman escalares, y los elementos de E se llaman vectores.

DEFINITION 1.1 (ESPACIO VECTORIAL.) *Dado un conjunto K llamado campo, generalmente K se toma como $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y E un conjunto no vacío donde se han definido dos operaciones "$\oplus$" y "$\odot$", suma y producto respectivamente, como sigue:*

1. *Suma: La suma es cerrada.*

$$E \times E \longrightarrow E$$

$$(u, v) \longmapsto u \oplus v$$

2. *Multiplicación por un escalar: La multiplicación por un escalar es cerrada*

$$K \times E \longrightarrow E$$

$$(\lambda, u) \longmapsto \lambda \odot u$$

Con las dos operaciones suma y multiplicación por un escalar se dice que la terna $(E, \oplus, \odot)$ *es un* K*-espacio vectorial si para todo* $u, v, w \in E$ *y para todo* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, se satisfacen los siguientes axiomas.*

3. *La suma es conmutativa:*

$$u \oplus v = v \oplus u$$

4. *La suma es asociativa:*

$$u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$$

5. *Existencia del elemento neutro aditivo, es decir,*

$$\textit{Existe } 0_E \in E \textit{ tal que } 0_E \oplus u = u \oplus 0_E = u \textit{ para todo } u \in E$$

6. *Existencia del inverso aditivo:*

$$\textit{Para todo } u \in E, \textit{ existe } -u \in E \textit{ tal que } u \oplus (-u) = 0_E$$

7. *Distributividad del producto con respecto a la suma:*

$$\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot u \oplus \lambda \odot v$$

8. *Distributividad del producto con respecto a la suma de escalares:*

$$(\lambda + \mu) \odot u = \lambda \odot u \oplus \mu \odot u$$

9. *Asociatividad del producto con escalares:*

$$\lambda \odot (\mu \odot u) = (\lambda\mu) \odot u$$

10. *Existencia del elemento neutro en un producto:*

$$1 \odot u = u$$

EJEMPLO 1.1 *Los siguientes:*

1. *El conjunto de los numeros reales* $\mathbb{R}$ *con las operaciones usuales de la suma y multiplicación, es decir, considerando "* $\oplus$ *" como "* $+$ *" y "* $\odot$ *" como "* $\cdot$ *", es un espacio vectorial. Verificar los 10 axiomas es trivial.*

2. $E = \{0\}$

   "El conjunto que consiste solamente del elemento cero en un espacio vectorial, pues satisfacen los diez axiomas."

3. $E = \{1\}$

   No es un espacio vectorial, pues viola el axioma de la cerradura bajo la suma, $1 + 1 = 2\,?$ *y otros axiomas mas.*

4. *El conjunto de los numeros complejos* $\mathbb{C}$ *es un espacio vectorial.*
   Los 10 axiomas se verifican com sigue: Sean u, v, $w \in \mathbb{C}$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   1. *Sean* $u, v \in \mathbb{C}$ *entonces*

      $$u = a + bi \text{ y } v = c + di$$

      Entonces la suma en $\mathbb{C}$ *se define como:*

      $$u \oplus v = a + c + i(b + d)$$

      se observa que así tal como esta definida la suma, el resultado sigue siendo un numero complejo. Por la tanto la suma es cerrada. Como nota, la suma entre a *y* c, b *y* d *es la suma usual de los numeros reales.*

2. *La multiplicación por escalar se define como sigue, sea* $u = a+ib \in \mathbb{C}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*
$$\lambda \odot u = \lambda a + i\lambda b$$
donde la multiplicación entre λ *y* a*,* λ *y* b *es la multiplicación usual de los numeros reales.*

3. *Sean* $u, v \in \mathbb{C}$*.* $u = a + ib$ *y* $v = c + id$*, entonces*
$$u \oplus v = a + bi + c + di = c + di + a + bi = v \oplus u$$

4. *Sean* $u, v, w \in \mathbb{C}$*, tal que*
$$u = a + ib,\ v = c + id \text{ y } w = e + if$$
Es fácil verificar que $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

5. *El elemento neutro aditivo se toma como:*
$$0_{\mathbb{C}} = 0 + i0$$
entonces para todo $u \in \mathbb{C}$*, se tiene:*
$$u + 0_{\mathbb{C}} = u$$

6. *Para todo* $u = a + ib \in E$*,* $-u = -a - bi$ *y satisface*
$$u \oplus (-u) = 0_{\mathbb{C}}$$

7. *Para todo* $u = a + bi$*,* $v = c + di$ *en* $\mathbb{C}$ *y* λ *en* $\mathbb{R}$*.*
$$\begin{aligned} \lambda \odot (u \oplus v) &= \lambda(a + bi + c + di) \\ &= \lambda(a + c + i(b + d)) \\ &= \lambda(a + b) + i\lambda(b + d) \\ &= \lambda a + i\lambda b + \lambda c + i\lambda d \\ &= \lambda \odot u \oplus \lambda \odot v \end{aligned}$$

8. $(\lambda + \mu) \odot u = \lambda \odot u \oplus \mu \odot u$

9. $\lambda \odot (\mu \odot u) = (\lambda\mu) \odot u$

10. El elemento neutro en producto se toma igual a 1. Entonces para todo $u = a + ib$ *en* $\mathbb{C}$*, se tiene*

$$1 \odot u = 1(a + bi) = 1a + 1ib = a + ib = u$$

5. $\mathbb{R}^2$ *es un espacio vectorial. La suma y la multiplicación se definen como sigue:*

$$\begin{aligned} \overline{x},\, \overline{y} \in \mathbb{R}^2,\, \overline{x} &= (x_1, x_2),\ \overline{y} = (y_1, y_2) \\ \overline{x} \oplus \overline{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \lambda \odot \overline{x} &= (\lambda x_1, \lambda x_2) \end{aligned}$$

y

$$0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0).$$

6. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio vectorial. La suma y la multiplicación se definen como sigue:*

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (x_1, x_2, \cdots, , x_n), \overline{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \\ \overline{x} \oplus \overline{y} &= (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \\ \lambda \odot \overline{x} &= (\lambda\, x_1, \cdots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

y

$$0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \cdots, 0).$$

Para el caso $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R}^n$ *se deja como ejercicio verificar los axiomas que faltan.*

Ejemplo 1.2 $E = \{x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x > 0\}$
Con la suma y la multiplicación usual de los numeros reales E *no es un espacio vectorial, es suficiente observar que* $0 \notin E$.

Ahora nuestro objetivo es redefinir la suma y la multiplicación de tal forma que E sea un espacio vectorial. *Entonces supongamos que E está dotado de las siguientes operaciones suma y multiplicación respectivamente. Para todo $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$u \oplus v = u \cdot v \tag{1.1}$$

y

$$\lambda \odot u = u^{\lambda} \tag{1.2}$$

Es decir por ejemplo

$$\begin{aligned} 2 \oplus 3 &= 2 \cdot 3 = 6 \\ 2 \odot 3 &= 3^2 = 9 \end{aligned}$$

¿Bajo las operaciones suma y multiplicación definidas por (1.1) *y* (1.2) *respectivamente. Pruebe que E es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial?*

Solución.

1. $u \oplus v \in E, \quad u \oplus v = u \cdot v \in E$

2. $u \in E\,, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \odot u = u^{\lambda} \in E$

3. $u \oplus v = v \oplus u\,?$ En efecto:

$$u \oplus v = u \cdot v = v \cdot u = v \oplus u$$

4. $u + (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w\,?$ Se tiene

$$u \oplus (v \oplus w) = u \cdot v \cdot w = (u \cdot v) \cdot w = (u \oplus v) \cdot w = (u \oplus v) \oplus w$$

5. $u \oplus 0_E = u \quad \Longrightarrow \quad u \cdot 0_E = u \quad \Longrightarrow \quad 0_E = 1$. Porque todos los elementos de E son estrictamente positivos. Entonces en E el elemento neutro aditivo esta dado por 1.

6. $u \oplus u' = 0_E \quad \Longrightarrow \quad u \oplus u' = 1 \quad \Longrightarrow \quad u \cdot u' = 1 \quad \Longrightarrow \quad u' = u^{-1}$.
   Entonces en E, $-u = u' = u^{-1}$.

7. $\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot u \oplus \lambda \odot v$?
   $\lambda \odot (u \oplus v) = \lambda \odot (uv) = (uv)^{\lambda} = u^{\lambda} \cdot v^{\lambda} = u^{\lambda} \oplus v^{\lambda} = \lambda \odot u \oplus \lambda \cdot v$

8. $(\lambda\mu) \odot u = \lambda \odot u \oplus \mu \odot v$?
   $(\lambda\mu) \odot u = u^{\lambda+\mu} = u^{\lambda} \cdot u^{\mu} = u^{\lambda} \oplus u^{\mu} = \lambda \odot u \oplus \mu \odot u$

9. $\lambda \odot (\mu \odot u) = (\lambda\mu) \odot u$?
   $\lambda \odot (\mu \odot u) = \lambda \odot (u^{\mu}) = (u^{\mu})^{\lambda} = u^{\mu\lambda} = (\lambda\mu) \odot u$

10. $\alpha \odot u = u^{\alpha} = u \Rightarrow \alpha = 1$. Entonces en E el elemento neutro para el producto esta dado por 1.

Como E satisface los 10 axiomas de la definición (1.1) por lo tanto es un espacio vectorial dotado de las operaciones antes mencionadas $\square$

Ejercicio 1.1 *Verifique si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales:*

1. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $y = mx\}, m$ *constante real*

2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $y = 3x + 2\}$

3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $ax + by + cz = 0\}$

4. $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *el espacio vectorial de todas las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *bajo las reglas usuales de la suma y producto por escalar definidas respectivamente como sigue:*

$$\begin{array}{rcccl} f+g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \lambda f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{array}$$

El elemento neutro aditivo en $\mathcal{F}$ esta dado por:

$$\begin{array}{rcccl} \underline{0} & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & \underline{0}(x) = 0 \end{array}$$

5. *Se considera la ecuación diferencial homogénea de segundo orden*

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas, pruebe que el conjunto de soluciones la ecuación diferencial es un espacio vectorial.

OBSERVACIÓN 1.1

- *$\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. En efecto, sean p y q en $\mathscr{P}_n$ y λ en $\mathbb{R}$. La suma y multiplicación por escalar en $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ se definen como sigue:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_lx^l \text{ donde } l \leq n$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_rx^r \text{ donde } r \leq n$$

Suponiendo que $l \leq r$, tenemos:

$$p(x) \oplus q(x) = a_0 + b_0 + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \ldots (a_l+b_l)x^l + a_{l+1}x^{l+1} + \ldots + a_rx^r$$

y

$$\lambda \odot p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \ldots\ldots + \lambda a_l x^l$$

- *El espacio $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Las operaciones suma y multiplicación se definen como sigue: sean A y $B \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y λ en $\mathbb{R}$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces la suma en $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se define como sigue:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

La multiplicación por escalar esta dada por:

$$\lambda \odot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

El elemento neutro aditivo esta dado por:

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $m = n$, $\quad \mathscr{M}_{m\times n}$ se denota como $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ el cual representa el espacio de las matrices cuadradas.

EJERCICIO 1.2 *Bajo las operaciones suma y multiplicación definidas arriba en cada caso, verifique que $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ y $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ son espacios vectoriales.*

OBSERVACIÓN 1.2 *Por razones de simplificar la notación , en el resto de todo el texto adopta la notación " $+$ " , " $\cdot$ " en lugar de " $\oplus$ ", " $\odot$ " respectivamente.*

TEOREMA 1.1 *Sea E un espacio vectorial, $u \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces*

1. $0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_E$

2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

3. $(-1) \cdot u = -u$

4. $\lambda \cdot u = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0$ *ó* $u = 0$

Demostración.

1. Utilizando el axioma 8 se tiene:

$$0 \cdot u = (0+0) \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$$

El axioma 6 afirma que cada elemento cuenta con un inverso aditivo, por lo tanto

$$0 \cdot u - 0.u = 0 \cdot u + 0 \cdot u - 0 \cdot u$$

$\Longrightarrow$

$$0 \cdot u = 0$$

2. El axioma 7 implica que

$$\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0+0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$$

Por lo tanto $\lambda \cdot 0 = 0$ es una consecuencia directa del axioma 6.

3. Por el axioma 8 y la propiedad 1 del Teorema 1.1 se tiene

$$(-1) \cdot u + u = ((-1) + 1) \cdot u = 0$$

Ahora

$$(-1) \cdot u + u = 0$$

Utilizando el axioma 6, se obtiene que:

$$(-1) \cdot u + u - u = 0 - u$$

Lo que implica

$$(-1) \cdot u = -u$$

4. Si $\lambda = 0$, $\lambda \cdot u = 0$ es una consecuencia de la propiedad 1 del Teorema 1.1. Si $\lambda \neq 0$ entonces se multiplican ambos lados de la igualdad

$$\lambda \cdot u = 0$$

por λ^{-1} por lo tanto

$$\lambda^{-1}\, \lambda \cdot u = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$$

lo que implica que $u = 0$.

$\square$

Teorema 1.2 *En cualquier espacio vectorial E, el elemento cero es único.*

Demostración. Supongamos que E cuenta con dos elementos cero 0_1 y 0_2. El axioma 5 implica lo siguiente:

$$0_1 + 0_2 = 0_2$$

y

$$0_2 + 0_1 = 0_1$$

es decir, se aplicó el axioma 5 considerando la propiedad del cero que tienen 0_1 y 0_2. Como consecuencia del axioma 3 se tiene:

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$$

Por lo tanto:

$$0_1 = 0_2$$

$\square$

Teorema 1.3 *En cualquier espacio vectorial E, cada elemento en E, tiene un único inverso aditivo.*

Demostración. Sea $u \in E$, supongamos que $u_1\, u_2$ son sus inversos aditivos entonces por el axioma 6 se tiene:

$$u + u_1 = 0$$

y

$$u + u_2 = 0$$

Lo que implica que

$$u + u_1 = u + u_2$$

Sumando u_2 a ambos términos de la igualdad anterior se obtiene:

$$u_2 + u + u_1 = u_2 + u + u_2$$

El siguiente resultado es una consecuencia del axioma 6

$$u_1 = u_2$$

□

1.1.1. Subespacios Vectoriales

Definition 1.2 *Un subconjunto W de un espacio vectorial E es un subespacio vectorial de E, si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de E.*

Teorema 1.4 *Sea E un espacio vectorial y sea W un subconjunto de E. W es un subespacio vectorial de E si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

a. $0 \in W$

b. Para todo $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$

c. $\forall\, u \in W$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot u \in W$

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que W es un subespacio vectorial de E, entonces W es un subespacio vectorial con respecto a las operaciones de E, por lo tanto $0_W \in W$ y es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar
$\Longleftarrow$ Como W satisface a, b y c y como W es subconjunto de E, entonces W es un espacio vectorial. $\square$

OBSERVACIÓN 1.3 *Para probar que un conjunto es un subespacio vectorial es suficiente verificar las propiedades b y c pues la propiedad a se obtiene tomando $\lambda = 0$ en la propiedad b.*
Sin embargo, es recomendable verificar la propiedad a porque si $0 \notin W$ se deduce de inmediato que W no es un subespacio vectorial.

EJEMPLO 1.3 *1. Es claro que $\{0\}$ y E son subespacios de E y se llaman subespacios triviales.*

2. La recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

3. El plano que pasa por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 1.3 *1. Pruebe que:*

$$\begin{aligned} E &= \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ tal que } f(-x) = f(x)\} \\ F &= \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ tal que } f(-x) = -f(x)\}, \end{aligned}$$

son subespacios vectoriales de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2. $E = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$. Pruebe que E es un subespacio vectorial de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Teorema 1.5 *Sea $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $Ax = 0$ un sistema lineal a n incógnitas. Entonces el conjunto de vectores soluciones del sistema lineal es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $Ax = 0$ esta dado por:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

Ahora el conjunto de todas las soluciones se representa como:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax = 0\}$$

Para probar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, se tienen que verificar las propiedades b y c del Teorema 1.4

- Para verificar la propiedad b. Se consideran u, v en W y la pregunta es probar que $u + v \in W$.

  $$A(u + v) = Au + Av$$

  como u, v son elemntos de W entonces $Au = 0$ y $Av = 0$ lo que implica que $A(u + v) = 0$, por lo tanto $u + v \in W$.

- Para verificar la propiedad c. Sea $u \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ y la pregunta es probar que $\lambda \cdot u \in W$.

  $$A(\lambda \cdot u) = \lambda Au$$

Como $u \in W$ entonces $Au = 0$ lo que implica que

$$A(\lambda \cdot u) = 0$$

por lo tanto $\lambda \cdot u \in W$. Finalmente W es un subespacio vectorial de E porque cumple con las propiedades b y c del Teorema 1.4.

$\square$

TEOREMA 1.6 *Sean H_1 y H_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial E. Entonces $H_1 \cap H_2$ en un subespacio vectorial de E.*

Demostración.

- Sean $x, y \in H_1 \cap H_2$ y la pregunta es probar que $x + y \in H_1 \cap H_2$. Como $x, y \in H_1 \cap H_2$ entonces:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow x, y &\in H_1 \quad \text{y} \quad x, y \in H_2 \\ \Longrightarrow x + y &\in H_1 \quad \text{y} \quad x + y \in H_2 \\ \Longrightarrow x + y &\in H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

  Del paso 1 al paso 2 se uso el hecho de que H_1 y H_2 son subespacios vectoriales.

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in H_1 \cap H_2$ y la pregunta es probar que $\lambda \cdot x \in H_1 \cap H_2$

$$\begin{aligned} x \in H_1 \cap H_2 &\Longrightarrow x \in H_1 \text{ y } x \in H_2 \\ &\Longrightarrow \lambda \cdot x \in H_1 \text{ y } \lambda \cdot x \in H_2 \\ &\Longrightarrow \lambda \cdot x \in H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

  Del paso 1 al paso 2 se uso que H_1 es un subespacio vectorial.

$\square$

Ejemplo 1.4 *La interseccíon de dos planos en* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y - z = 0\} \\ H_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 3z = 0\} \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.6 la intersección de dos planos que pasan por el origen es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Observación 1.4 *La unión de dos subespacios vectoriales no es necesariamente un subespacio vectorial. Consideramos:*

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = 2x\} \\ H_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y = 3x\} \end{aligned}$$

Se observa que $(1,2) \in H_1$ *y* $(1,3) \in H_2$ *pero* $(1,2)+(1,3) = (2,5) \notin H_1 \cup H_2$. *Por lo tanto* $H_1 \cup H_2$ *no es cerrado bajo la suma, entonces no es un subespacio vectorial.*

Ejemplo 1.5 *Sea* $W = \{f[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(1/2) = 0\}$.
Pruebe que W *es un subespacio de* $\mathscr{F}([-1,1], \mathbb{R})$.

Solución. La prueba conciste en verificar las propiedades b y c del Teorema 1.4.

b. Sean f y $g \in W$ y la pregunta es si $f + g \in W$ Se observa que

$$(f+g)(1/2) = f(1/2) + g(1/2) = 0$$

Lo que justifica que $f + g \in W$.

c. Sean $f \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(1/2) = \lambda f(1/2) = 0 \Longrightarrow \lambda f \in W$$

por lo tanto W es un subespacio de $\mathscr{F}([-1,1], \mathbb{R})$.

$\square$

1.1.2. Combinación lineal y Espacios Generados

DEFINITION 1.3 (COMBINACIÓN LINEAL) *Sean $u_1, u_2, \cdots, u_n$ en un espacio vectorial E. Entonces cualquier vector de la forma*

$$a_1\, u_1 \;+\; a_2\, u_2 \;+ \cdots +\; a_n\, u_n$$

dónde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ en $\mathbb{R}$ se llama combinación lineal de $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

EJEMPLO 1.6 *Determine si el vector $u = (7, 1, 16)$ es una combinación lineal de $\underbrace{(-1, 2, 2)}_{u_1}\ \underbrace{(3, -1, 4)}_{u_2}$*

Solución. Se buscan $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + a_2 u_2 \\ &= (-a_1, 2a_1, 2a_1) + (3a_2, -a_2, 4a_2) \end{aligned}$$

La busqueda de a_1 y a_2 se reduce a la resolución del siguiente sistema lineal:

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 7 &=& -a_1 &+& 3a_2 \\ 1 &=& 2a_1 &-& a_2 \\ 16 &=& 2a_1 &+& 4a_2 \end{array} \right.$$

Para resolver el sistema lineal anterior se utiliza la elimminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 16 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 30 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow \boxed{a_1 = 2, a_2 = 3}$$

$\square$

Ejemplo 1.7 *Verifique si* $u = (-7, 7, 7)$ *es una combinación lineal de* $u_1 = (-1, 2, 4)$ *y* $u_2 = (5, -3, 1)$

Solución. Se buscan a_1, a_2 tal que

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + a_2 u_2 = (-a_1, 3a_1, 4a_1) + (5a_2, -3a_2, a_2) \\ &= (-a_1 + 5a_2, 2a_1 - 3a_2, 4a_1 + a_2) \end{aligned}$$

La busqueda de a_1 y a_2 se reduce a la resolución del siguiente sistema lineal:

$$\Longrightarrow \begin{cases} -a_1 + 5a_2 &= -7 \\ 2a_1 - 3a_2 &= 7 \\ 4a_1 + a_2 &= 7 \end{cases}$$

Utilizando el método de la eliminación de Gauss se obtiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \\ 4 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 21 & -21 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{a_1 = 2,\ a_2 = -1}$$

□

Ejemplo 1.8 *Verifique si* $u = (9, 2, 7)$ *es una combinación lineal de* $u_1 = (1, 2, -1)$ *y* $u_2 = (6, 4, 2)$.

Solución. Se buscan a_1 y a_2 tal que:

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2$$

$\Longrightarrow$

$$(9, 2, 7) = (a_1,\, 2a_1,\, -a_1) + (6a_2,\, 4a_2,\, 2a_2)$$

$\Longrightarrow$

$$(9, 2, 7) = (a_1 + 6a_2,\, 2a_1 + 4a_2,\, -1a_1 + 2a_2)$$

Entonces la ecuación anterior se reduce al siguiente sistema lineal:

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 + 6a_2 & = & 9 \\ 2a_1 + 4a_2 & = & 2 \\ -a_1 + 2a_2 & = & 7 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & 8 & 16 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \boxed{a_1 = -3, a_2 = 2}$$

$\square$

EJEMPLO 1.9 *¿Es $u = (4, -1, 8)$ una combinación lineal de $u_1 = (1, 2, -1)$ y $u_2 = (6, 4, 2)$?*

Solución. Se buscan α y β en $\mathbb{R}$ tal que:

$$u = \alpha\, u_1 + \beta\, u_2$$

Lo que implica

$$\begin{array}{rcl} u & = & (\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (6\beta, 4\beta, 2\beta) \\ (4, -1, 8) & = & (\alpha + 6\beta,\, 2\alpha + 4\beta,\, -\alpha + 2\beta) \end{array}$$

Lo cual se reduce al siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta &= \ 4 \\ 2\alpha + 4\beta &= -1 \\ -\alpha + 2\beta &= \ 8 \end{cases}$$

La eliminación Gaussiana nos lleva a lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 12 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right) ?$$

El sistema es inconsistente, por lo tanto u no puede ser combinación lineal de u_1, u_2. □

Ejemplo 1.10 *Sean*

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

¿Verifique si M es combinación lineal de M_1 y M_2?

Solución. Sean α y β en $\mathbb{R}$ tal que:

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2$$

$$\Longrightarrow M = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 4\alpha \\ \alpha & \alpha & 5\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & -2\beta \\ -2\beta & 3\beta & -6\beta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 4\alpha - 2\beta \\ \alpha - 2\beta & \alpha + 3\beta & 5\alpha - 6\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo que nos lleva al siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} -\alpha & = & -3 \\ \beta & = & 2 \\ 4\alpha - 2\beta & = & 8 \\ \alpha - 2\beta & = & -1 \\ \alpha + 3\beta & = & 9 \\ 5\alpha - 6\beta & = & 3 \end{cases}$$

La eliminación Gaussiana nos lleva a lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{\alpha = 3 \text{ y } \beta = 2}$$

□

Definition 1.4 *Los vectores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ generan un espacio vectorial E, si cualquier vector $u \in E$ se expresa como combinación lineal de*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

.

Ejemplo 1.11
- $\mathbb{R}$ *Esta generado por el vector $u_1 = \{1\}$*
- $\mathbb{R}^n$ *esta generado por $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, donde: $u_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $u_2 = (0, 1, \cdots, 0)$,$\cdots$,$u_n = (0, \cdots, 1)$.*
- $\mathbb{C}$ *esta generado por $\{u_1, u_2\}$ donde*

$$u_1 = 1 \text{ } y \text{ } u_2 = i.$$

- $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *es el espacio de los polinomios de grado* $\leq n$ *es generado por*

$$\{1, x, x^2 \cdots, x^n\},$$

pues cualquier polinomio $p(x)$ *de grado* $\leq n$ *se expresa como*

$$p(x) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $i = 0, 1, \cdots, n$*, y* $r \leq n$*.*

- $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *el conjunto de todas las matrices está generado por :*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pues para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

OBSERVACIÓN 1.5 *El espacio vectorial* $\mathscr{P}$ *de todos los polinomios no puede ser generado por ningún conjunto finito.*

DEFINITION 1.5 *[Espacio generado por un conjunto de vectores]*
Sean $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$ *vectores en un espacio vectorial* E*. El conjunto de todas las combinaciones lineales de* $\{u_1, \cdots, u_k\}$ *es denotado por*

$$Vect\{v_1, \cdots, u_k\} = \left\{ u \in E, \text{ tal que } u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k \right\}$$

TEOREMA 1.7 *Sean* $u_1, \cdots, u_k$ *vectores en el espacio vectorial* E*, entonces el espacio* $Vect\{u_1, \cdots, u_k\}$ *generado por* $\{u_1, \cdots, v_k\}$ *es un subespacio vectorial de* E*.*

Demostración.

- Sean $u, v \in \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_k\}$ entonces existen $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ y $(\beta_i)_{1\leq i\leq k}$ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$$

y

$$v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i$$

$\Longrightarrow$

$$u + v = \sum_{i=k}^{k} (\alpha_i + \beta_i)\, u_i$$

Por lo tanto $u+ v$ es una combinación lineal de los u_i's. Lo que implica que $u + v \in Vect\,\{u_1, \cdots, u_k\}$.

- Sean $u \in \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_k\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lambda \cdot u = \sum_{i=1}^{n} \lambda\, \alpha_i\, u_i \in Vect\{u_1, \cdots, u_k\}$$

Por lo tanto $Vect\{u_n, \cdots, u_k\}$ es un subespacio vectorial de E.

$\square$

Ejemplo 1.12 *Verifique si* $(4, 11, 2) \in Vect\,\{(2, 1, 0),\ (-1, 4, 1)\}$.

Solución. Se buscan α y β tal que:

$$(4, 11, 2) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(-1, 4, 1)$$

y el sistema lineal queda como sigue:

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta &= 4 \\ \alpha + 4\beta &= 11 \\ \beta &= 2 \end{cases}$$

Utilizando la eliminación de Gauss obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \boxed{\alpha = 3, \beta = 2}$$

□

Ejemplo 1.13 *Sea* $W = Vect\{\sin^2(x), \cos^2(x)\}$ *Determine si* $\cos(2x) \in W$

Solución. El cálculo nos afirma que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Entonces $cos(2x)$ se expresa como combinación lineal de $sen^2(x)$ y $cos^2(x)$ como sigue

$$\begin{gathered} cos(2x) = (1)\cos^2(x) + (-1)\sin^2(x) \\ \Longrightarrow \quad \cos(2x) \in W \end{gathered}$$

□

Ejemplo 1.14 *Sea* $W = Vect\{2, 1-x, x^2\}$
¿Es $2x^2 - 3x + 1$ *un elemento de* W*?*

Solución. Se buscan α, β y λ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2\alpha + \beta(1-x) + \lambda x^2 \\ &= 2\alpha + \beta - \beta x + \lambda x^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 2 \\ -\beta & = & -3 \\ 2\alpha + \beta & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} \lambda & = & 2 \\ \beta & = & 3 \\ \alpha & = & \dfrac{1-\beta}{2} = \dfrac{1-3}{2} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = -1, \beta = 3, \lambda = 2}$$

Por lo tanto

$$2x^2 - 3x + 1 = (2)x^2 + (3)(1 - x) + (-1)2$$

$\square$

OBSERVACIÓN 1.6 *En el ejemplo anterior se utilizo el siguiente hecho:*

Dos polinomios p y $q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ son iguales si y solo si tienen los mismos coeficintes.

Es decir, si:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

y

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

Entonces

$$p(x) = q(x) \Longleftrightarrow a_i = b_i \ \forall i = 1, 2 \cdots, n$$

EJERCICIO 1.4

1. *¿Es $\mathbb{R}^2$ generado por los siguientes vectores?*
   a) $(2, 10), (10, 8)$
   b) $(1, 1), (2, 1), (2, 2)$
   c) $(1, 1), (2, 2), (5, 5)$
2. *Pruebe que el espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos en un plano que pasa por el origen.*
3. *Sean $u_1 = (2, -1, 4)$ y $u_2 = (4, 1, 6)$ en $\mathbb{R}^3$. Encuentre explícitamente $Vect\{u_1, u_2\}$.*

1.2. Dependencia Lineal e Independencia Lineal

DEFINITION 1.6 *Sean $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vectores en un espacio vectorial E. Se dice que los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son* **linealmente dependientes** *si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$ no todos iguales a cero tal que:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots, + \alpha_n v_n = 0 \ (*)$$

Si $(*)$ se satisface únicamente cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, entonces se dice que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son **linealmente independientes**.

EJEMPLO 1.15 *Verifique si los siguientes vectores son l.d o l.i.*

1. $(1,1), (2,1), (2,2)$ *en* $\mathbb{R}^2$.
2. $(1,4,3), (2,5,1), (3,6,-2)$ *en* $\mathbb{R}^3$.
3. $1-x, 5+3x-2x^2, 1+3x+x^2$ *en* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Solución.

1. Pongamos $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,1)$ y $v_3 = (2,2)$. Sean $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \lambda v_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\lambda = 0 \\ \alpha + \beta + 2\lambda = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $\beta = 0$ y $\alpha + 2\lambda = 0$. Para $\alpha = 1$ se tiene $\lambda = -\frac{1}{2}$. El sistema lineal tiene una infinidad de soluciones por lo tanto v_1, v_2, v_3 son l.d.

2. Pongamos $v_1 = (1, 4, 3), v_2 = (2, 5, 1), v_3 = (3, 6, -2)$. Sean $\alpha, \beta,\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 \lambda v_3 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha + 2\beta + 3\lambda = 0 \\ 4\alpha + 5\beta + 6\lambda = 0 \\ 3\alpha + \beta - 2\lambda = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $\alpha = \beta = \lambda = 0$, por lo tanto v_1, v_2, v_3 son l.i.

3. Pongamos $v_1 = 1-x, v_2 = 5+3x-2x^2, v_3 = 1+3x+x^2$. Sean $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \lambda v_3 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha(1 - x) + \beta(5 + 3x - 2x^2) + \lambda(1 + 3x + x^2) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha + 5\beta + \lambda + (-\alpha + 3\beta + 3\lambda)x + (-2\beta + \lambda)x^2 = 0$$

entonces buscar α, β, λ se reduce al siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + 5\beta + \lambda = 0 \\ -\alpha + 3\beta + 3\lambda = 0 \\ -2\beta + \lambda = 0 \end{array}\right. \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $\alpha = \beta = \lambda = 0$, por lo tanto v_1, v_2 y v_3 son l.i.

$\square$

OBSERVACIÓN 1.7 *Como consecuencia directa de la Observación 1.6 los vectores que forman el conjunto* $\{1, x_1, \cdots, x^n\} \subset \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *son l.i.*

EJERCICIO 1.5 *Verifique si los siguientes vectores son l.d ó l.i*

1. $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 0)$ *en* $\mathbb{R}^2$.

2. $v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (2, -2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 7)$ *en* $\mathbb{R}^3$.

3. $v_1 = (2, -1, 0, 3)$, $v_2 = (1, 2, 5, -1)$, $v_3 = (7, -1, 5, 8)$ *en* $\mathbb{R}^4$.

4. $v_1 = x^2 - 1$, $v_2 = x^2 + 1$, $v_3 = 4x$, $v_4 = 2x - 3$ *en* $\mathscr{P}_2[-1, 1]$.

TEOREMA 1.8 *Dos vectores en un espacio vectorial E son linealmente dependientes si y solo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.*

Demostración. $\Longrightarrow$ Supongamos que v_1, v_2 dos vectores en E l.d, entonces existen α_1, α_2 en $\mathbb{R}$ no todos iguales a cero tal que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$

Suponiendo que $\alpha_1 \neq 0$, se obtiene

$$v_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_1$$

Lo que implica que

$$v_2 \text{ es multiplo escalar de } v_1$$

$\Longleftarrow$ Supongamos ahora que v_1 es múltiplo escalar de v_2 entonces existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$v_1 = \alpha_1 v_2 \implies v_1 - \alpha_1 v_2 \, \Omega$$

$\Longrightarrow$

$$\{v_1, v_2\} \text{ son l.d.}$$

$\square$

TEOREMA 1.9 *Sean* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *un conjunto de* n *vectores en un espacio vectorial* E. *Entonces se tiene lo siguiente.*

1. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *son linealmente dependientes si y solo si al menos uno de los vectores* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *se puede expresarse como combinación lineal de los demás vectores del conjunto.*

2. $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *son linealmente independientes si y solo si ningún vector del conjunto se puede expresarse como combinación lineal de otros vectores del conjunto.*

Demostración.

1. $\Longrightarrow$ Supongamos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son l.d, entonces existen

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \neq 0 \text{ en } \mathbb{R}$$

tal que.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots, + \alpha_n v_n = 0$$

Sea $\alpha_i \neq 0$. Entonces:

$$v_i = \frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 + \cdots + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n$$

Por lo tanto v_i se expresa como combinación lineal de los demás vectores. Lo que prueba la primera implicación. del conjunto.

$\Longleftarrow$ Supongamos que v_1 se expresa como combinación lineal de $v_1, v_2. \cdots, v_n$, entonces existen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_1 = \beta_1 v_2 + \cdots + \beta_{n-1} v_n$$

$$\Longrightarrow v_1 - \beta_1 v_2 \cdots - \beta_{n-1} v_n = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ son l.d}$$

2. La prueba de la afirmación 2 del Teorema 1.9 se deja como ejercicio.

□

TEOREMA 1.10 *Supongamos que $A = \{v_1, v_2 \cdots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$ tal que $n > m$. Entonces A es un conjunto de vectores linealmente dependiente.*

Demostración. Para demostrar que $\{v_1, v_2 \cdots, v_n\}$ son l.d, se tiene que encontrar $\{\alpha_{1 \leq i \leq n}\} \neq 0$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \tag{1.3}$$

Como $\{v_1, v_2 \cdots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, entonces cada v_i es un vector en $\mathbb{R}^n$, es decir, posee m componentes como sigue:

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ . \\ . \\ . \\ v_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ . \\ . \\ . \\ v_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, v_n = \begin{pmatrix} v_{nn} \\ v_{nn} \\ . \\ . \\ . \\ v_{mn} \end{pmatrix}$$

Ahora (1.3) queda representada en el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} + & \cdots & +\alpha_n v_{n1} = 0 \\ \alpha_1 v_{21} + \alpha_2 v_{22} + & \cdots & +\alpha_n v_{2n} = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 v_{m1} + \alpha_2 v_{m2} + & \cdots & +\alpha_n v_{mn} = 0 \end{cases}$$

Se observa que el sistema lineal homogéneo, contiene n incógnitas y m ecuaciones tal que $n > m$. Es decir mas incógnitas que ecuaciones, lo que implica la existencia de una infinidad de soluciones por lo tanto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ son l.d. $\square$

EJEMPLO 1.16 *Verifique si los siguientes vectores son l.d o l.i.*

1. $(1,1),(2,1),(2,2)$ *en* $\mathbb{R}^2$.
2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *en* $\mathbb{R}^3$.

Solución. Los vectores son l.d en cada caso como consecuencia del Teorema 1.10. $\square$

DEFINITION 1.7 *Sea E un espacio vectorial, el conjunto de vectores $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ en E es base de E si se satisface lo siguiente:*

- *B es linealmente independiente*
- *B genera a E.*

EJEMPLO 1.17
- $(1,0),(0,1)$ *es base de* $\mathbb{R}$.
- $(1,i)$ *es base de* $\mathbb{C}$.

- $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ *tal que*

$$u_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ u_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, u_n = (0, \cdots, 0, 1)$$

en base de $\mathbb{R}^n$.

- $\{1, x, x^2, x^n\}$ *es base de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Ejercicio 1.6 *Verifique que:*

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Teorema 1.11 *Si* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *es una base de* E. *Entonces para todo* $v \in E$ *existe in conjunto único de escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *en* $\mathbb{R}$ *tal que:*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Demostración. Sea que $v \in E$. Como $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ es una base de E, entonces genera a E por lo tanto v se puede expresar como combinación lineal de los $v_i's$ como sigue:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

donde $\alpha_i's$ en $\mathbb{R}$. Ahora supongamos que v se expresa como combinación lineal de los $v_i's$ de otra manera distinta como sigue:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

donde los $\beta_i's$ en $\mathbb{R}$. Entonces:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

Lo que implica que:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)v_i = 0$$

como el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ forma una base entonces son l.i, por lo tanto:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall \ i = 1, \cdots, n.$$

lo que demuestra el Teorema 1.11. $\square$

TEOREMA 1.12 *Si $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ y $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son bases en un espacio vectorial E, entonces. $m = n$.*

EJERCICIO 1.7 *Demuestre el Teorema 1.12.*

OBSERVACIÓN 1.8 *Cualquier dos bases en un espacio vectorial, tienen el mismo número de elementos.*

DEFINITION 1.8 *Sea E un espacio vectorial. B una base de E con un número finito de elementos. Entonces la dimensión de E denotada por $dim\, E$, es el número de elementos de B.*

EJEMPLO 1.18

$$dim\, \mathbb{R} = 1, \quad dim\, \mathbb{R}^2 = 2. \quad dim\, \mathbb{R}^n = n$$

$$dim\, \mathbb{C} = 2, \quad dim\, \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1, \quad dim\, \mathscr{M}_{m\times n} = mn$$

OBSERVACIÓN 1.9

- *Si un espacio vectorial E no cuenta con una base finita, entonces E se denomina espacio vectorial con dimension infinita.*
- *Si $E = \{0\}$ se dice que E tiene dimensión 0.*

EJERCICIO 1.8 *Sea $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y = -x\}$*

1. *Pruebe que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.*

2. Encuentre una base de W y su dimensión.

TEOREMA 1.13 *Sea E un espacio vectorial con dimensión $dim\, E = n$. Sean $u_1, u_2, \cdots .u_m$ un conjunto de m vectores l.i en E. Entonces $m \leq n$.*

EJERCICIO 1.9 *Demuestre el Teorema 1.13.*

OBSERVACIÓN 1.10 *Como consecuencia del Teorema 1.13, un conjunto l.i en un espacio vectorial no puede tener mas elementos que la misma base.*

TEOREMA 1.14 *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. H subespacio vectorial de E. Entonces H tiene dimensión finita y:*

$$dim\, H \ \leq \ dim\, E$$

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema (1.13) pues H no puede ser generado por un conjunto l.i de mas de n elementos "$n = \ dim\, E$"
□

OBSERVACIÓN 1.11 *Cualquier espacio vectorial que contiene a un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita. Por ejemplo:*

$$\mathscr{P}[0,1] \subset C[0,1]$$

TEOREMA 1.15 *Cualquier conjunto de n vectores l.i en un espacio vectorial E de dimensión n forma una base para E.*

Demostración. Sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un conjunto de n vectores l.i en E.

1$^{\text{er}}$Caso. Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ generan a E, entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de E.

2$^{\text{do}}$Caso. Supongamos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ no generan a E, entonces existe $u \in E$ tal que:

$$u \notin Vect\,\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}, \tag{1.4}$$

entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u\}$ son l.i. Es decir:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} u = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0.$$

Ahora pongamos $W = Vect\,\{v_1, v_2, \cdots, v_n, u\}$ el subespacio vectorial de E, entonces $dim\, W = n+1$, lo cual contradice el hecho del Teorema 1.14 y como consecuencia también el hecho dado en (1.4). Por lo tanto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de E. $\square$

Observación 1.12 *El Teorema 1.15 nos dice que cualquier conjunto l.i en un espacio vectorial E cuyo numero de elementos es igual a $dim\, E$ forma una base de E. Es decir, que cuando se conoce la dimensión de E no es necesario probar la condición de generación, es suficiente probar que el conjunto es l.i para que sea base.*

Ejemplo 1.19 *Encuentre los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$*

Para encontrar los subespacios de $\mathbb{R}^3$, nos referimos al Teorema (1.14), el cual nos indica que los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ son de $dim\, H = 0, 1, 2, 3$.

- $dim\, H = 0 \Longrightarrow H = \{0\}$.

- *$dim, H = 1$, entonces H está generado por un solo vector v en $\mathbb{R}^3$* $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$H = Vect\,\{(x_0, y_0, z_0)\}$$

entonces cualquier $u \in H$ se expresa como

$$u = tv \Rightarrow \begin{cases} x & = & tx_0 \\ y & = & ty_0 \\ z & = & tz_0 \end{cases}$$

para $t \in \mathbb{R}$, lo cual representa la forma paramétrica de una recta que pasa por el origen y con vector director (x_0, y_0, z_0).

- *$dim, H = 2$, entonces H está generado por dos vectores l.i*

  $$v_0 = (x_0, y_0, z_0), v_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

  Entonces por el Ejercicio (1.4) se deduce que

  $$H = Vect\{v_0, v_1\}$$

  es un plano en $\mathbb{R}^3$.

- *$dim\, H = 3 \implies$ que H esta generado por un conjunto de tres vectores v_0, v_1, v_2 l.i en $\mathbb{R}^3$, es decir, $H = Vect\{u, v, w\}$, como $dim\, \mathbb{R}^3 = 3$, entonces $\{v_0, v_1, v_2\}$ también es base de $\mathbb{R}^3$ por lo tanto $H = \mathbb{R}^3$*

1.3. Producto Interno

1.3.1. Definición y Ejemplos

Definition 1.9 *Sea E un espacio vectorial. Un producto interno ó "Producto Escalar generalizado" sobre E, es por definición una función definida por:*

$$\begin{array}{rccc} <,>: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & < u, v > \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $< u, v > = < u, v >$ *"Simetría"*

2. $< u{+}v, w > = < u, w > + < v, w >$ *para todo* $u, v, w \in E$ *"Aditividad"*

3. $< \lambda u, v > = \ \lambda < u, v >$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u, v \in E$ *"Homogeneidad"*

4. $< u, u > \geq 0$ *para todo* $u \in E$ *"Positividad"*

5. $< u, u > = 0 \Longleftrightarrow \ u = 0$

EJEMPLO 1.20 *El producto interno estándar en* $\mathbb{R}^n$*, se define como sigue: Para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

y satisface las 5 Propiedades, en efecto:

1. *Para todo* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \, x_i = < x, y >$$

2. *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} < x + y, z > &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \\ &= < x, z > + < y, z > \end{aligned}$$

3.
$$< \lambda x, y > = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) y_i = \lambda < x, y >$$

4.
$$< x, x > = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

5.
$$\begin{aligned} < x, x > = 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &\Longleftrightarrow x_i = 0 \ \textit{para todo}\,, i = 1, \cdots, n \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.21 -*Sean* $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^2$. *Pongamos*

$$< u, v > = 3x_1\, x_2 + 2y_1\, y_2$$

Pruebe que $<, >$ *es un producto interno sobre* $\mathbb{R}^2$.

Solución.

1. $< u, v > = 3x_1\, x_2 + 2y_1\, y_2 = 3x_2\, x_1 + 2y_2\, y_1 = < v, u >$

2. Sea $w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$
   Entonces:

$$\begin{aligned} < u+v, w > &= 3(x_1+x_2)x_3 + 2(y_1+y_2)y_3 \\ &= 3x_1x_3 + 2y_1y_3 + 3x_2x_3 + 2y_2y_3 \\ &= < u, w > + < v, w > \end{aligned}$$

3. $< \lambda u, v > = \ 3\lambda x_1x_2 + 2\lambda y_1y_2 \ = \ \lambda(3x_1x_2 + 2y_1y_2) \ = \ \lambda < u, v >$

4. $< u, u > = \ 3x_1^2 + 2y_1^2 \ \geq \ 0$

5. $< u, u > = \ 0 \ = \ 3x_1^2 + 2y_1^2 \ = \ 0 \iff x_1 \ = \ y_1 \ = \ 0 \iff u = 0$

$\square$

Teorema 1.16 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$ entonces para todo $u, v, w \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:*

1. $< 0, u >=< u, 0 >= 0$

2. $< u, \lambda v >= \lambda < u, v >$

3. $< u, v+w >=< u, v > + < u, w >$

Demostración.

1. $< 0, v >= 0 < 0, v >= 0$. "Se utiliza la propiedad de Simetría junto con la de Homogeneidad."

2. $< u, \lambda v >=< \lambda v, u >= \lambda < v, u >= \lambda < u, v >$

3. Utilizando la propiedad de Simetría y Aditividad se tiene:

$$\begin{aligned} < u, v+w > &= < v+w, u >=< v, u > + < w, u > \\ &= < u, v > + < u, w > \end{aligned}$$

$\square$

1.3.2. Norma y Distancia

DEFINITION 1.10 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Entonces se define la norma o "longitud" de un vector $u \in E$ por la siguiente formula:*

$$||u|| = \sqrt{< u, u >}$$

y la distancia entre u y v en E por

$$d(u, v) = ||u - v||$$

OBSERVACIÓN 1.13 *Sea $E = \mathbb{R}^2$ y $<,>$ el producto interno estándar en $\mathbb{R}^2$, entonces se tiene:*

$$||u|| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Generalmente para todo $u \in \mathbb{R}^n$ con el producto interno estándar:

$$||u|| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

EJEMPLO 1.22 *Sea $E = \mathbb{R}^2$ con el producto interno*

$$< u, v >= 3x_1x_2 + 2y_1y_2 \qquad (1.5)$$

entonces: $||u|| = \sqrt{< u, u >} = \sqrt{3x_1^2 + 2y_1^2}$

OBSERVACIÓN 1.14

- *Si $E = \mathbb{R}^2$ y $<,>$ es el producto interno estándar, entonces el conjunto de $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $||u|| = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$ y lo ultimo representa la ecuación de un circulo en $\mathbb{R}^2$.*

- *Ahora supongamos que se quiere estudiar el conjunto de $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $||u|| = 1$ con el producto interno no estándar dado por* (1.5). *Entonces se observa que $||u|| = 1 \Longrightarrow 3x^2 + 2y^2 = 1$, lo cual representa a una elipse en $\mathbb{R}^2$.*

OBSERVACIÓN 1.15 *Se define el producto interno estándar sobre* $C[\alpha, \beta]$ *como sigue:*

$$< f, g >= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \ \ \textit{para todo} \ \ f, g \in C[\alpha, \beta] \tag{1.6}$$

Además la norma de f *en* $C[\alpha, \beta]$ *esta dada por:*

$$||f|| = \sqrt{< f, f >} = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

y la distancia entre f *y* g *en* $C[\alpha, \beta]$ *por:*

$$d(f, g) = ||f - g|| = \left(\int_{\alpha}^{\beta} \Big(f(x) - g(x) \Big)^2 \right)^{1/2}$$

EJERCICIO 1.10

1. *Pruebe que la función dada por* (1.6) *es un producto interno sobre* $C[\alpha, \beta]$.

2. *Tomando* $\alpha = 0$ *y* $\beta = \pi$ *en* (1.6) *. Encuentre* $||1||$, $||senx||$ *y* $d(senx, cosx)$ *en* $C[0, \pi]$.

TEOREMA 1.17 *Sea* E *un espacio vectorial con producto interno* $<, >$*. Entonces para todo* $u, v \in E$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

1. $||u|| \geq 0$

2. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

3. $||\lambda u|| = |\lambda| \ ||u||$

Demostración.

1. $||u|| = \sqrt{< u, u >} \geq 0$ "Es por definición de la norma"

2. $||u|| = 0 \Longleftrightarrow < u, u >= 0 \Longleftrightarrow u = 0$

3. Utilizando la definición de la norma y la propiedad de Homogeneidad se obtiene:

$$\begin{aligned} ||\lambda u|| &= \sqrt{<\lambda u, \lambda u>} = \sqrt{\lambda^2 < u, u >} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{< u, u >} \\ &= |\lambda|\sqrt{< u, u >} \end{aligned}$$

$\square$

COROLARIO 1.1 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Entonces todo $u, v \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene:*

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$

EJERCICIO 1.11 *Demuestre el Corolario 1.1.*

TEOREMA 1.18 (DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ) *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Sean $u, v \in E$. Entonces:*

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

Demostración.
1^{er}**Caso** Si $u = 0$ la afirmación es verdadera pues

$$< 0, v >= 0 = ||0|| \cdot ||v||$$

2^{do}**Caso** Si $u \neq 0$ tenemos :

$$< tu + v, tu + v >\geq 0$$

Utilizando la propiedad de Aditividad, Homogeneidad y Simetría se tiene

$$t^2 < u, u > +t < u, v > +t < v, u > + < v, v >\geq 0$$

lo que implica que

$$t^2 < u,u> +2t < u,v> + < v,v> \geq 0 \tag{1.7}$$

El lado izquierdo de la desigualdad (1.7) es una cuadrática de t positiva, por lo tanto su discriminante es negativo, es decir,

$$\triangle \leq 0 \iff 4 < u,v>^2 -4 < u,u>< v,v> \leq 0$$

entonces

$$< u,v>^2 \leq < u,u>< v,v>$$

$\Longrightarrow$

$$< u,v>^2 \leq ||u||^2 \cdot ||v||^2$$

Finalmente

$$| < u,v> | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

$\square$

Observación 1.16 *Sea $C[\alpha,\beta]$ el espacio de las funciones continuas y Sean $f,g \in C[\alpha.\beta]$, como consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$| < f,g> | \leq ||f||||g||$$

$\Longrightarrow$

$$\Big| \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \Big| \leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx \right)^{1/2} \left(\int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx \right)^{1/2} \tag{1.8}$$

La expresión dada por (1.8) *es de gran importancia en Análisis y Probabilidad.*

Teorema 1.19 *[La desigualdad del triángulo] Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$ y sean $u,v \in E$. Entonces:*

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Demostración. Por la definición de la norma se tiene

$$\begin{aligned}
||u+v||^2 &= \ < u+v, u+v > \\
&= \ < u,u > +2 < u,v > + < v,v > \\
&= \ ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 \quad \text{“Se utilizo la desigualdad de C-S.”} \\
&\leq \ ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 \\
&\leq \ (||u|| + ||v||)^2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$$

$\square$

Observación 1.17 *Como consecuencia del Teorema* (1.19) *se tiene, para todo u, v, w en E*

$$d(u,v) \ \leq \ d(u,w) \ + \ d(w,v)$$

En efecto

$$\begin{aligned}
d(u,v) = ||u-v|| &= \quad ||u-w+w-v|| \\
&\leq \ ||u-w|| + ||w-v|| \\
&= \quad d(u,w) + d(w,v)
\end{aligned}$$

1.3.3. Norma Matricial

Definition 1.11 *[Matriz transpuesta] Sea $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ una matriz en $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces la transpuesta de A denotada por A', es la matriz $n\times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. Es decir, si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ \textit{entonces} \ A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.23

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 1.12 *[La traza de una matriz] Sea* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ *una matriz en* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, la traza de A denotada por* $tr(A)$ *es la suma de las componentes de la diagonal de A,es decir,*

$$tr(A) \ = \ a_{11} \ + \ a_{22} \ + \cdots + \ a_{nn}$$

Ejemplo 1.24 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

Solución.

$$tr(A) = (1) + (3) + (-3) = 1$$

□

Ejemplo 1.25 *Sean* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentre $tr(AB)$ *y* $tr(B'A')$

Solución.

$$AB = \begin{pmatrix} -2+4+12 & 1+6+3 \\ -6+4+4 & 3+6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$tr(AB) = 24.$$

$$B'A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4+12 & -6+4+4 \\ 1+6+3 & 3+6+1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$B'A' = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$tr(B'A') = 24.$$

$\square$

EJERCICIO 1.12 *Sean A y B matrices en $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathscr{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ respectivamente. Pruebe que $tr(AB) = tr(A'B')$.*

DEFINITION 1.13 *[Producto interno sobre el espacio de las matrices] Sean A y B en $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, el producto interno de A y B se define como:*

$$< A, B >= tr(A'B)$$

EJEMPLO 1.26 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. *Encuentre* $< A, B >$.

Solución. $< A, B >= tr(A', B)$

$$A'B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -16 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$< A, B >= tr(A'B) = 23 + 7 = 30$$

$\square$

Observación 1.18 *Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces la norma de la matriz A queda como sigue:*

$$||A|| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{tr(A'A)} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

Ejemplo 1.27 *Encuentre Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$. Encuentre $||A||$.*

Solución.

$$A'A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+4+25 & -3-10 \\ -3-10 & 1+4 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A'A = \begin{pmatrix} 38 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

y

$$||A|| = \sqrt{tr(A'A)} = \sqrt{43}$$

o bien

$$||A|| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4+25+4} = \sqrt{43}$$

□

Observación 1.19 *En $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces*

$$||A|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

En efecto: $\quad ||A|| = \sqrt{tr(A'A)}$.

$$A'A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$tr(A'A) = a^2 + c^2 + b^2 + d^2$$

y finalmente

$$||A|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

1.3.4. Ortogonalidad

Para motivar la definición de ortogonalidad se considera un espacio vectorial E con producto interno $<,>$. Sean $u, v \in E$, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $u \neq 0$ y $v \neq 0$
Se tiene

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

$\Longrightarrow$

$$-||u|| \cdot ||v|| \leq < u, v > \leq ||u|| \cdot ||v||$$

$\Longrightarrow$

$$-1 \leq \frac{< u, v >}{||u|| ||v||} \leq 1$$

Por lo tanto existe un ángulo $\theta \leq \pi$ tal que:

$$cos(\theta) = \frac{< u, v >}{||u|| ||v||}. \tag{1.9}$$

Observación 1.20 *Se observa que en* $\mathbb{R}^2$ *la expresión dada en* (1.9) *recupera la noción de ángulo entre dos vectores. Además*

$$< u, v > = ||u|| ||v|| cos(\theta)$$

representa la ley de los cosenos conocida en los cursos básicos de Matemáticas. Una consecuencia de la ley de los cosenos es la siguiente:

$$< u, v > = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \tag{1.10}$$

Motivados por el análisis anterior y el hecho dado por (1.10), se considera como definición de ortogonalidad en un espacio vectorial E con producto interno a lo siguiente:

DEFINITION 1.14 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Se dice que u y v en E son ortogonales si y solo si $< u, v >= 0$.*

EJEMPLO 1.28 *1. Sea $E = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar y sean $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,0,1)$. u_1, u_2, u_3 son mutuamente ortogonales.*

Solución. *En efecto:*

$$< u_1, u_2 >= 0, < u_1, u_3 >= 0, < u_2, u_3 >= 0.$$

□

2. Sean $E = C[-\pi, \pi], f(x) = 1$ y $g(x) = sen(x)$. Entonces $f(x)$ y $g(x)$ son ortogonales.

Solución. *Para probar que $f(x)$ y $g(x)$ son ortogonales es suficiente probar que el producto interno de $f(x)$ y $g(x)$ es igual a cero. En efecto:*

$$\begin{aligned} < f(x), g(x) > &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} sen(x)\,dx \\ &= -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= -(cos(\pi) - cos(-\pi) = 0. \end{aligned}$$

□

3. Sea $E = \mathscr{P}_2[-1,1]$ el espacio de los polinomios de grado a lo más 2, con el producto interno en el espacio de las funciones continuas $C[-1,1]$. Son ortogonales los polinomios $p(x) = x$ y $g(y) = x^2$.

Solución.

$$\begin{aligned} < p, q > &= < x, x^2 > \\ &= \int_{-1}^{1} p(x)g(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx \\ &= \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto p y q son ortogonales, pues su producto interno es igual a cero. □

TEOREMA 1.20 *[Teorema de Pitágoras general] Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Sean u, v en E y supongamos que u y v son ortogonales entonces:*

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Demostración.

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 &= < u + v, u + v > \\ &= < u, u > + < v, v > +2 < u, v > \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 \end{aligned}$$

Del paso 2 al paso 3 se utiliza el hecho de que u y v son ortogonales. □

EJEMPLO 1.29 *Sea $E = \mathscr{P}_2[-1, 1]$ y sea $p(x) = x$ y $q(x) = x^2$.*

1. *Encuentre $||p||^2, ||q||^2$ y $||p + q||^2$.*

2. *Verifique el teorema de Pitágoras.*

Solución.

1. •

$$\begin{aligned} ||p||^2 &= < p, p > \\ &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx \\ &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} ||q||^2 &= < q, q > \\ &= \int_{-1}^{1} x^4\, dx \\ &= \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} ||p+q||^2 &= < p+q, p+q > \\ &= \int_{-1}^{1} (x+x^2)^2\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x^2+2x^3+x^4)\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

2. $$||p+q||^2 = ||p||^2 + ||q||^2 + ||q||^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

   por lo tanto se cumple el Teorema de Pitágoras. Aunque es suficiente probar que p y q son ortogonales como sigue:

$$\begin{aligned} < p, q > &= \int_{-1}^{1} x x^2\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx \\ &= \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 \end{aligned}$$

□

DEFINITION 1.15 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$ y sea W un subespacio vectorial de E. Se dice que $u \in E$ es ortogonal a W si u es ortogonal a todos los elementos de W. El conjunto de los elementos de $u \in E$ que son ortogonales W se llama el complemento ortogonal de W y se denota $W^{\perp}$.*

Teorema 1.21 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$, y sea W un subespacio vectorial de E, entonces:*

1. *$W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E.*

2. *$W \cap W^{\perp} = \{0\}$.*

Demostración.

1. - Por el Teorema 1.16 se tiene que

   $$< 0, w >= 0 \;\forall\, w \in W$$

   es decir, $0 \in W^{\perp}$.

   - Sean $u, v \in W^{\perp}$, se tiene que probar W es cerrado bajo la suma, es decir que $u + v \in W^{\perp}$ lo quiere decir que $u + v$ es ortogonal a cualquier vector de W. Sea $w \in W$, utilizando la propiedad de Aditividad del producto interno y el hecho de que $u, v \in W^{\perp}$ se tiene:

   $$< u + v, w >=< u, w > + < v, w >= 0 \;\forall\, w \in W$$

   lo que implica que $u + v \in W^{\perp}$.

   - Ahora falta probar que $W^{\perp}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalar, es decir, $\lambda u \in W^{\perp}$ para todo $u \in W^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $w \in W$, entonces utilizando la propiedad de Homogeneidad del producto interno y el hecho de que $u \in W^{\perp}$ se tiene:

   $$< \lambda u, w >= \lambda < u, w >= 0 \;\forall\, w \in W$$

   lo que implica que $\lambda u \in W^{\perp}$. Como las condiciones del Teorema 1.4 se satisfacen, entonces $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E.

2. Como W y $W^\perp$ son subespacios vectoriales de E entonces $0 \in W \cap W^\perp$. Ahora, sea $u \in W \cap W^\perp$ entonces $u \in W^\perp$ lo que implica que:

$$< u, w >= 0 \; \forall \, w \in W$$

Como $u \in W$, entonces la expresión anterior con $w = u$ queda como sigue:

$$< u, u >= 0 = ||u||^2$$

entonces $u = 0$ y $W \cap W^\perp = \{0\}$.

□

Ejemplo 1.30 *Sea* $W = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $y = 2x\big\}$ *el subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$*. Encuentre* $W^\perp$*.*

Solución. *Sea* $u = (x', y') \in W^\perp$*, entonces para todo* $w = (x, y) \in W$ *se tiene,*

$$< u, w >= 0 \implies x'x + y'y = 0$$

Como $y = 2x$*, la ecuación anterior para todo* $x \neq 0$ *queda como sigue:*

$$y' = -\frac{1}{2}x'.$$

Finalmente, $W^\perp = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $y = -\frac{1}{2}x\big\}$. □

Definition 1.16 *Sea* E *un espacio vectorial con producto interno* $<, >$*. Sea* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *un subconjunto de* E*.*

- *Se dice que* B *es un conjunto ortogonal si* $v_i \neq v_j$ *son ortogonales para todo* $i \neq j$*.*

- *Se dice que* B *es ortonormal. Si* B *es ortogonal y* $||v_i|| = 1$ *para todo* $i = 1, \cdots, n$*.*

Observación 1.21 *1. Un conjunto ortogonal que además es una base se llama* **base ortogonal***.*

2. *Un conjunto ortonormal que además es una base se llama* **base ortonormal**.

OBSERVACIÓN 1.22 *Si $v \neq 0$ un vector en un espacio vectorial, entonces el vector $u = \dfrac{v}{||v||}$ tiene norma igual a 1.*

$$||u|| = ||\frac{v}{||v||} = \frac{1}{||v||}||v|| = 1$$

Entonces para normalizar un vector distinto de cero es suficiente dividirlo entre su norma.

EJEMPLO 1.31 1. *En $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ es una base ortonormal.*

2. *En $\mathbb{R}^n$, $B = \{(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0)\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$ es una base ortonormal.*

TEOREMA 1.22 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$, y sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ortonormal de E. Entonces un vector $u \in E$ se puede expresar como:*

$$u =< u, v_1 > v_1+ < u, v_2 > v_2 + \cdots + < u, v_n > v_n$$

Demostración. Sea $u \in E$, como B es una base de E entonces u se expresa como combinación lineal de los elementos de B, es decir, existen:
$(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}$, tal que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Como B es una base ortogonal, entonces para todo $i = 1, \cdots, n$ se tiene:

$$< u, v_i >= \alpha_1 < v_1, v_i > + \alpha_2 < v_2, v_i > + \cdots + \alpha_i < v_i, v_i > + \cdots + \alpha_n < v_n, v_i >$$

Utilizando la propiedad de ortogonalidad de B se obtiene que:

$$< u, v_i >= \alpha_i < v_i, v_i >= \alpha_i \|v_i\|^2 \ \forall \ i = 1, \cdots, n.$$

Finalmente,

$$\alpha_i =< u, v_i > \ \forall\, i = 1, \cdots, n.$$

$\square$

OBSERVACIÓN 1.23 *En lugar de resolver un sistema lineal, en el Teorema 1.22 las coordenadas de u con respecto a la base ortonormal* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *están dadas por* $< u, v_1 >, < u, v_2), \cdots, < u, v_n >$.

EJEMPLO 1.32 *Sean* $v_1 = (0, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 0, -1)$ *en* $\mathbb{R}^3$.

1. *Verifique que* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *es una base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$.

2. *Deduzca de* B *una base ortonormal* B'.

3. *Exprese* $u = (1, 1, 1)$ *con respecto a la base* B'.

Solución.

1. Como $dim\, \mathbb{R}^3 = 3$, entonces es suficiente probar que los vectores de B son l.i. Sean $\alpha, \beta\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \lambda(1, 0, -1) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \beta + \lambda = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta - \lambda = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha = \beta = \lambda = 0.$$

Entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ son l.i y por lo tanto B es una base de $\mathbb{R}^3$. Como $< v_1, v_2 >= 0, < v_1, v_3 >= 0,$ y $< v_2, v_3 >= 0$ entonces B es una base ortogonal.

2. La base ortonormal B' se obtiene normalizando los elementos de B como sigue:
$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = v_1,\ u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{v_2}{\sqrt{2}},\ u_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{v_3}{\sqrt{2}}$$
La base ortonormal $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$.

3. Como B' es una base ortonormal por el Teorema 1.22 se deduce que:
$$u =< u, u_1 > u_1+ < u, u_2 > u_2+ < u, u_3 > u_3$$
donde:
$$\begin{aligned} &< u, u_1 >=< (1, 1, 1), (0, 1, 0) >= 1 \\ &< u, u_2 >=< (1, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) >= \sqrt{2} \\ &< u, u_3 >=< (1, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) >= 0 \end{aligned}$$
Entonces:
$$u = (1, 1, 1) = (0, 1, 0) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

□

Corolario 1.2 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<, >$ y sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ortogonal de E. Sea u un vector en E, entonces:*
$$u = \frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \frac{< u, v_2 >}{||v_2||^2} v_2 + \cdots + \frac{< u, v_n >}{||v_n||^2} v_n.$$
Demostración. Sea $u \in E$, como B es una base de E entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$ tal que:
$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$
Entonces, para todo $i = 1, 2 \cdots, n$
$$< u, v_i >= \alpha_1 < v_1, v_i > +\alpha_2 < v_2, v_i > + \cdots + \alpha_n < v_n, v_i >,$$

como B es una base ortogonal se obtiene que:

$$\alpha_1 = \frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2}, \alpha_2 = \frac{< u, v_2 >}{||v_2||^2}, \cdots, \alpha_n = \frac{< u, v_n >}{||v_n||^2}$$

por lo tanto:

$$u = \frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2} v_1 + \frac{< u, v_2 >}{||v_2||^2} v_2 + \cdots + \frac{< u, v_n >}{||v_n||^2} v_n.$$

$\square$

TEOREMA 1.23 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Sea $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un subconjunto ortogonal de E, tal que:*

$$v_i \neq 0 \ \forall \ i = 1, \cdots, n,$$

entonces B es linealmente independiente.

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

entonces para todo $i = 1, \cdots, n$ se tiene:

$$< \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, v_i >= 0$$

como B es ortogonal se obtiene que:

$$\alpha_i ||v_i||^2 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha_i = 0 \ \forall \ i = 1, \cdots, n$$

Por lo tanto cualquier conjunto B ortogonal en E es linealmente independiente. $\square$

Teorema 1.24 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$ y $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ un subconjunto ortonormal de E. Consideramos el subespacio generado por $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, $W = Vect\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Sea $u \in E$, pongamos:*

$$w_1 =< u, v_1 > v_1+ < u, v_2 > v_2 + \cdots + < u, v_n > v_n$$

y

$$w_2 = u - w_1$$

Entonces:

$$w_1 \in W \ y \ w_2 \in W^{\perp}$$

Demostración. Se observa que

$$w_1 =< u, v_1 > v_1+ < u, v_2 > v_2 + \cdots + < u, v_n > v_n$$

es una combinación lineal de $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, entonces:

$$w_1 \in W = Vect\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}.$$

Ahora falta probar que $w_2 \in W^{\perp}$. Es decir, probar que w_2 es ortogonal a todo vector de W. Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de W entonces es suficiente probar que w_2 es ortogonal a cada v_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. En efecto:

$$\begin{aligned}
< w_2, v_i > &= < u - w_1, v_i >=< u - w_1, v_i > \\
&= < u, v_i > - < w_1, v_i > \\
&= < u, v_i > - << u, v_1 > v_1 + \cdots + < u, v_n > v_n, v_i > \\
&= < u, v_i > - < u, v_1 >< v_1, v_i > - \cdots - < u, v_n >< v_n, v_i > \\
&= < u, v_i > - < u, v_i >< v_i, v_i >= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $w_2 \in W^{\perp}$. □

Observación 1.24

- *$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ no es necesariamente una base de E.*

- *El vector* $w_1 \in W$ *se llama la proyección ortogonal de* u *sobre* W *y se denota* $w_1 = P_W(u)$.

EJEMPLO 1.33 *Sea* $E = \mathbb{R}^3$, *con el producto interno estándar. Sea* W *el subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *generado por* $v_1 = (0,1,0), v_2 = (-4/5, 0, 3/5)$ *y sea* $u = (1,1,1)$.

1. *Verifique que* $\{v_1, v_2\}$ *es un conjunto ortonormal.*

2. *Encuentre* $w_1 = P_W(u)$ *y deduzca* w_2.

Solución.

1. $< v_1, v_2 >=< (0,1,0), (-4/5, 0, 3/5) >= 0$, entonces $v_1 \perp v_2$. $||v_1|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$, $||v_2|| = \sqrt{(-4/5)^2 + 0^2 + (3/5)^2} = 1$. Por lo tanto $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto ortonormal.

2. Por el Teorema 1.24 se tiene,

$$\begin{aligned} w_1 &= < u, v_1 > v_1 + < u, v_2 > v_2 \\ &= < (1,1,1), (0,1,0) > (0,1,0) + \\ &\quad < (1,1,1), (-4/5, 0, 3/5) > (-4/5, 0, 3/5) \\ &= v_1 - \frac{1}{5} v_2 \\ &= \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25} \right). \end{aligned}$$

además

$$w_2 = u - w_1 = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25} \right)$$

$\square$

OBSERVACIÓN 1.25 *Es fácil observar que en el ejemplo anterior tenemos que* $< w_1, w_2 >= 0$ *lo que prueba que* $w_1 \perp w_2$ *hecho afirmado por el Teorema 1.24.*

EJEMPLO 1.34 *Sean* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y sea* $W = Vect(B)$.

1. *Encuentre* $||B||$ *y* $< A, B >$.

2. *Deduzca* $w_1 = P_W(A)$ *y* w_2.

Solución.

1. • $||B|| = \sqrt{tr(B'B)}$ y

$$B'B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $||B|| = \sqrt{5}$.

• $< A, B >= tr(A'B)$ y

$$A'B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $< A, B >= 1$.

2. Por el Teorema 1.24, se tiene:

$$\begin{aligned} w_1 &= P_W(A) =< A, \frac{B}{||B||} > \frac{B}{||B||} \\ &= \frac{1}{5} < A, B > B \\ &= \tfrac{1}{5} B \end{aligned}$$

Entonces $w_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $w_2 = A - w_1 = \begin{pmatrix} -1 & 6/5 \\ 3/5 & 1 \end{pmatrix}$. Es fácil verificar que :

$$< w_1, w_2 >= tr(w_1' w_2) = tr \begin{pmatrix} 6/25 & 2/5 \\ 4/5 & -6/25 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Ejemplo 1.35 *Sean $f(x) = sen(x)$, $g(x) = cos(x)$ en $C[0,\pi]$. Sea W el subespacio vectorial generado, $W = Vect\{f(x), g(x)\}$.*

1. *Encuentre $< f, g >$, $||f||$ y $||g||$.*
2. *Sea $h(x) = x$. Encuentre $P_W(h(x))$ y deduzca w_2.*

Solución.

1. •
$$< f,g >= \int_0^\pi sen(x)cos(x)\,dx = \frac{1}{2}sen^2(x)\Big|_0^\pi = 0.$$

•
$$\begin{aligned} ||sen(x)|| &= \sqrt{< sen(x), sen(x) >} = \left(\int_0^\pi sen^2(x)\,dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos(2x)\right)\,dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{4}sen(2x)\Big|_0^\pi\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

•
$$\begin{aligned} ||cos(x)|| &= \sqrt{< cos(x), cos(x) >} = \left(\int_0^\pi cos^2(x)\,dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{2}x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}sen(2x)\Big|_0^\pi\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
P_W(h(x)) &= < x, \frac{sen(x)}{||sen(x)||} > \frac{sen(x)}{||sen(x)||} + < x, \frac{cos(x)}{||cos(x)||} > \frac{cos(x)}{||cos(x)||} \\
&= \frac{2}{\pi} < x, sen(x) > sen(x) + \frac{2}{\pi} < x, cos(x) > cos(x) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} xsen(x)\, dx\right) sen(x) + \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} xcos(x)\, dx\right) cos(x) \\
&= 2sen(x) - \frac{4}{\pi}cos(x).
\end{aligned}$$

Además:

$$w_2 = h(x) - w_1 = x - 2sen(x) + \frac{4}{\pi}cos(x).$$

$\square$

1.4. Bases Ortonormales

1.4.1. Método de Gram-Schmidt

En esta sección se introduce el Procedimiento o Método de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal.

Teorema 1.25 *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $<,>$. Entonces E cuenta con una base ortonormal.*

Demostración. La demostración consiste en construir una base ortonormal. El método de construcción utilizado se llama método Gram-Schmidt o procedimiento de Gram-Schmidt. Sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base cualquiera de E. La base ortonormal se construye en n-etapas.

1$^{\text{era}}$ etapa:

Se obtiene el primer vector v_1 como sigue:

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$$

y se observa que v_1 es ortonormal pues:

$$||v_1|| = ||\frac{u_1}{||u_1||}|| = \frac{||u_1||}{||u_1||} = 1.$$

2^{da} etapa:
Sea W_1 el subespacio vectorial generado por v_1, es decir, $W_1 = Vect\{v_1\}$. Pongamos:

$$w_2 = u_2 - P_{W_1}(u_2)$$

entonces $< w_2, v_2 >= 0$ porque por el Teorema 1.24 $w_2 \perp W_1$. Además $w_2 \neq 0$, sino u_2 y v_1 son l.d, lo que contradice el hecho de que $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es una base. Ahora el segundo vector v_2 de la base ortonormal se toma como:

$$v_2 = \frac{w_2}{||w_2||}.$$

3^{era} etapa:
Sea $W_2 = Vect\{v_1, v_2\}$ y pongamos:

$$w_3 = u_3 - P_{W_2}(u_3)$$

entonces $w_3 \perp W_2$. De la misma manera que en la etapa-2, $w_3 \neq 0$ de lo contrario $u_3 \in Vect\{u_1, u_2\}$ lo que contradice que u_1, u_2, u_3 son l.i. El tercer vector se obtiene como:

$$v_3 = \frac{w_3}{||w_3||}.$$

Repetimos el procedimiento hasta la etapa-n. Finalmente se obtiene un conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ tal que

$$||v_1|| = ||v_2|| = \cdots = ||v_n|| = 1 \text{ y } < v_i, v_j >= 0 \; \forall \, i \neq j.$$

Entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es ortonormal, por lo tanto es una base de E. $\square$

Ejemplo 1.36 *Sea $E = \mathbb{R}^2$.*

1. *demuestre que* $B = \{(1,1),(3,-2)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$*, pero no ortogonal.*

2. *Deduzca de* B *una base ortonormal* B' *de* $\mathbb{R}^2$*.*

Solución.

1. Pongamos $u_1 = (1,1)$ y $u_2 = (3,-2)$, como B esta formada por tres vectores y $dim\,\mathbb{R}^2 = 2$, entonces para demostrar que B es base de $\mathbb{R}^2$, es suficiente demostrar que $\{u_1, u_2\}$ son l.i. Sean α y β en $\mathbb{R}$ tal que:
$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0,$$
lo que implica que $\left\{\begin{array}{l}\alpha + 3\beta = 0\\ \alpha - 2\beta = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}5\alpha = 0\\ \alpha - 2\beta = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \beta = 0\end{array}\right.$
entonces u_1, u_2 son l.i, por lo tanto $B = \{u_1, u_2\}$ forma una base en $\mathbb{R}^2$. Como $< u_1, u_2 >= 1 \neq 0$, entonces B no es ortogonal.

2.
   - Para deducir una base ortonormal se utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt:
$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
   - Sea $W_1 = Vect\,\{v_1\}$. Entonces:
$$\begin{aligned} w_2 &= u_2 - P_{W_1}(u_2) = u_2 - < u_2, v_1 > v_1\\ &= (3,-2) - < (3,-2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\ &= \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$
   Finalmente
$$v_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
   y $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Ejemplo 1.37 *Sea $E = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estandar y sean $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,0,1)$.*

1. *Verifique que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Deduzca de B una base ortonormal B' de $\mathbb{R}^3$.*

Solución.

1. Como B esta formada por tres vectores y $dim\,\mathbb{R}^3 = 3$, entonces para demostrar que B es base de $\mathbb{R}^3$, es suficiente demostrar que $\{u_1, u_2, u_3\}$ son l.i.
   En efecto, sean α, β, λ en $\mathbb{R}$ tal que:
   $$\alpha u_1 + \beta u_2 \lambda u_3 = 0$$
   entonces, $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \lambda = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$ Por lo tanto $\{u_1, u_2, u_3\}$ son l.i, lo que implica que B es una base $\mathbb{R}^3$ no ortogonal (fácil de verificar).

2.
   - Para construir la base ortonormal se uliza el procedimiento de Gram-Schmidt.
   $$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$
   - Sea $W_1 = Vect\,\{v_1\}$. Entonces
   $$\begin{aligned} w_2 &= u_2 - P_{W_1}(u_2) = u_2 - < u_2, v_1 > v_1 \\ &= (0,1,1) - < (0,1,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

y

$$v_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

- Para obtener el tercer vector, sea $W_2 = Vect\{v_1, v_2\}$.

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3 - P_{W_2}(u_3) = u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2 \\ &= (0,0,1) - < (0,0,1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\quad - < (0,0,1), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) > \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $||w_3|| = \sqrt{< w_3, w_3 >} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces:

$$v_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Por lo tanto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

□

Ejercicio 1.13 *Sea $E = \mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar y sean $u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$.*

1. *Verifique que $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Deduzca de B una base ortonormal B' de $\mathbb{R}^3$.*

Corolario 1.3 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<>$. Sea W un subspacio vectorial de dimensión finita en E. Entonces todo $u \in E$ se expresa de manera única como sigue:*

$$u = w_1 + w_2,$$

donde

$$w_1 \in W \ \ y \ w_2 \in W^{\perp}, \ \ ademas\ w_1 = P_W(u).$$

Ejercicio 1.14 *Demuestre el Corolario 1.3. Use el hecho de los Teoremas 1.24 y 1.25.*

1.4.2. La Aproximación Óptima

Teorema 1.26 *Sea E un espacio vectorial con producto interno $<,>$. Sea W un subespacio vectorial de E y $u \in E$. Entonces:*

$$||u - P_W(u)|| < ||u - w|| \text{ para todo } w \in W \text{ tal que } w \neq P_W(u).$$

Demostración. Para todo $w \in W$ observamos que:

$$u - w = (u - P_W(u)) + (P_W(u) - w)$$

donde

$$P_W(u) - w \in W \text{ y } u - P_W(u) \in W^{\perp}.$$

Utilizando el Teorema de Pitagoras 1.20 se obtiene:

$$||u - w||^2 = ||u - P_W(u)||^2 + ||P_W(u) - w||^2$$

como $w \neq P_W(u)$ entonces $||P_W(u) - w|| > 0$ lo que implica que:

$$||u - P_W(u)||^2 < ||u - w||^2$$

y por lo tanto:

$$||u - P_W(u)|| < ||u - w||.$$

□

Observación 1.26 *A $P_W(u)$ se le llama la aproximación óptima de u sobre W y indica que la distancia mínima de un vector u a un subespacio vectorial W es la norma de la diferencia entre u y su proyección ortogonal sobre W.*

Para ser mas explicito, sean $E = \mathbb{R}^n$ y W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces para todo $u \in \mathbb{R}^n$ se considera el siguiente problema de optimización:

$$\mathcal{P}_u : \begin{cases} \text{ínf } ||u - w|| \\ w \in W \end{cases}$$

Entonces por Teorema 1.26, para cada $u \in \mathbb{R}^n$ el problema $\mathcal{P}_u$ admite un óptimo, es decir,

$$\inf_{w \in W} ||u - w|| = \min_{w \in W} ||u - w|| = ||u - P_W(u)||$$

EJEMPLO 1.38 *Sea $E = \mathbb{R}^2$ y se considera el subespacio vectorial de E dado por:*

$$W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y = -\frac{1}{2}x\right\}$$

1. *Dé una base de W y su dimensión.*
2. *Deduzca una base ortonormal B' de W.*
3. *Encuentre $P_W(10, 2)$ en terminos de la base B'.*

Solución.

1. Sea $u = (x, y) \in W$, se tiene:

$$u = (x, y) = \left(x, -\frac{1}{2}x\right) = x\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

entonces el conjunto $B = \left\{\left(1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ formdo por un solo vector $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ genera a W y ademas es l.i, por lo tanto $B = \left\{\left(1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ es una base de W.

2. Como B contiene solamente un elemento, entonces es suficiente normalizar el vector $u_1 = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ como sigue:

$$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

y la base ortonormal está dada por $B' = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$.

3. Por el Teorema 1.24 se tiene:

$$\begin{aligned} P_W(10,2) &= <(10,2), v_1> v_1 \\ &= <(10,2), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)> \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \left(\frac{36}{5}, -\frac{18}{5}\right) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.39 *Sea $E = C[0,1]$ y $W = Vect\{1, x\}$.*

1. *Verifique que $B = \{1, x\}$ es una base de W.*
2. *Deduzca de B una base ortonormal B' de W.*
3. *Encuentre $P_W(x^2)$.*

Solución.

1. Como $B = \{1, x\}$ genera a W entonces es suficiente probar que los vectores en B son l.i. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha + \beta x = 0$$

lo que implica que $\alpha = \beta = 0$, pues "un polinomio es igual a cero si y solo si todos sus coeficientes son iguales a cero". Entonces $B = \{1, x\}$ es una base de W. Como

$$<1, x> = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

entonces B no es ortogonal.

2. Para encontrar una base ortonormal se utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt. Pongamos $u_1 = 1, u_2 = x$.

- $$v_1 = \frac{u_1}{||u_1||}$$
  como $||u_1|| = \left(\int_0^1 1\,dx\right)^{1/2} = 1$ entonces $v_1 = 1$.
- Sea $W_1 = Vect\{v_1\}$ entonces:
  $$\begin{aligned} w_2 &= u_2 - P_{W_1}(u_2) \\ &= u_2 - < u_2, v_1 > v_1 \\ &= x - \left(\int_0^1 x\,dx\right) 1 \\ &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$
  y
  $$v_2 = \frac{w_2}{||w_2||}$$
  como
  $$||w_2|| = \sqrt{< w_2, w_2 >} = \left(\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{12}}$$
  entonces
  $$v_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
  y finalmente $B' = \left\{1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right\}$ es una base ortonormal de W.

3. Por el Teorema 1.24 se tiene:

$$\begin{aligned} P_W(x^2) &= < x^2, v_1 > v_1 + < x^2, v_2 > v_2 \\ &= < x^2, 1 > 1 + < x^2, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) > 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^1 x^2\,dx + 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= x - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 1.15 *Sea $E = C[0,1]$ y $W = Vect\{1, x, x^2\}$.*

1. *Verifique $B = \{1, x, x^2\}$ es una base de W.*

2. *Encuentre una base ortonormal B' de W.*

3. *Encuentre $P_W(e^x)$ y $P_W(3x^4)$.*

Solución.

1. Como $B = \{1, x, x^2\}$ genera a W entonces es suficiente probar que los vectores en B son l.i. Sean $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha + \beta x + \lambda x^2 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

Entones los elementos de B son l.i, por lo tanto B es una base. Como

$$< 1, x >= \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}, < 1, x^2 >= \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$$

y

$$< x, x^2 >= \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}$$

entonces B es una base pero no ortogonal.

2. Para construir una base ortonormal B' se utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt. Pongamos $u_1 = 1, u_2 = x, u_3 = x^2$.

- $v_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$ como
$$||u_1|| = \left(\int_0^1 1\,dx\right)^{1/2} = 1$$
entonces $v_1 = 1$.

- Sea $W_1 = Vect\{v_1\}$ el segundo vector se construye como sigue:
$$\begin{array}{rcl} w_2 & = & u_2 - P_{W_1}(u_2) \\ & = & x - < x, 1 > 1 \\ & = & x - \displaystyle\int_0^1 x\,dx = x - \frac{1}{2} \end{array}$$
Como $||w_2|| = \sqrt{< w_2, w_2 >} = \left(\displaystyle\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx\right)^{1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$, entonces:
$$v_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

- Sea $W_3 = Vect\{v_1, v_2\}$ y w_3 esta dado por:
$$\begin{array}{rcl} w_3 & = & u_3 - P_{W_3}(u_3) \\ & = & u_3 - < u_3, v_1 > v_1 - < u_3, v_2 > v_2 \\ & = & x^2 - \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx - 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx \\ & = & x^2 - x + \dfrac{1}{6} \end{array}$$
Como
$$\|w_3\| = \sqrt{< w_3, w_3 >} = \left(\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$
Finalmente,
$$v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$
y $B' = \left\{1, 2\sqrt{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \dfrac{1}{6}\right)\right\}$ es una base ortonormal de W.

3. • Por el Teorema 1.24 se tiene:

$$P_W(e^x) = < e^x, v_1 > v_1 + < e^x, v_2 > v_2 + < e^x, v_3 > v_3$$

Ahora calculamos los productos internos involucrados en la expresión anterior separadamente como sigue:

$$\begin{aligned}
< e^x, v_1 > v_1 &= < e^x, 1 > \\
&= \int_0^1 e^x \, dx \\
&= (e-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< e^x, v_2 > v_2 &= 12 < e^x, \left(x - \frac{1}{2}\right) > \left(x - \frac{1}{2}\right) \\
&= 12 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(\int_0^1 e^x \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \right) \\
&= 6(3-e) \left(x - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< e^x, v_3 > v_3 &= 180 < e^x, \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) > \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\
&= 180 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \left(\int_0^1 e^x \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx \right) \\
&= 30(7e-19) \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$P_W(e^x) = (e-1) + 6(3-e) \left(x - \frac{1}{2}\right) + 30(7e-19) \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

•

$$P_W(3x^4) = < 3x^4, v_1 > v_1 + < 3x^4, v_2 > v_2 + < 3x^4, v_3 > v_3$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
< 3x^4, v_1 > v_1 &= 3 < x^4, 1 > \\
&= 3 \int_0^1 x^4 \, dx \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< 3x^4, v_2 > v_2 &= 36 < x^4, \left(x - \tfrac{1}{2}\right) > \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\
&= 36\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 x^4 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx\right) \\
&= \frac{12}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
< 3x^4, v_3 > v_3 &= 540 < x^4, \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) > \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\
&= 540\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\left(\int_0^1 x^4 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx\right) \\
&= \frac{36}{7}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$P_W(3x^4) = \frac{3}{5} + \frac{12}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{36}{7}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

□

Ejercicio 1.16 *En lugar del producto interno estándar en el espacio de las funciones continuas $E = C[\alpha, \beta]$, resuelva el ejemplo anterior utilizando los siguientes productos internos en cada caso:*

1.

$$< f, g >= \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\, dx$$

2.

$$< f, g >= \int_1^e f(x)g(x)\ln(x)\, dx$$

Véase la Lista I de ejercicios en donde se especifica E con valores adecuados de α y β.

1.4.3. Aproximaciones Por Polinomios Trigonométricos

Inspirados por el procedimiento de Gram-Schmidt, se construye una aproximación óptima de una función continua en un subespacio vectorial generado por funciones trigonométricas. Sea $E = C[0, 2\pi]$ dotado del producto interno estándar dado por:

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx,$$

y sean:

$$u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{2n}$$

tal que

$$u_0(x) = 1, u_{2k-1}(x) = cos(kx), u_{2k}(x) = sen(kx) \text{ para todo } k = 1, 2, \cdots, n$$

Consideramos el subespacio vectorial de E dado por:

$$W = Vect\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{2n}\}.$$

PROPOSICIÓN 1.1 $\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{2n}\}$ *es un subconjunto de* E *ortogonal y*

$$\left\{\frac{u_0}{\sqrt{2\pi}}, \frac{u_1}{\sqrt{\pi}}, \frac{u_2}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{u_{2n}}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

es ortonormal.

Demostración.

- $$< u_0, u_0 >= \int_0^{2\pi} u_0^2\, dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$
- Para todo $k = 1, 2 \cdots, n$

$$< u_{2k}, u_{2k} >= \int_0^{2\pi} u_{2k}^2\, dx = \int_0^{2\pi} sen^2(kx)\, dx = \pi.$$

- Para todo $k = 1, 2 \cdots, n$
$$< u_{2k-1}, u_{2k-1} >= \int_0^{2\pi} u_{2k-1}^2 \, dx = \int_0^{2\pi} cos^2(kx) \, dx = \pi.$$
- Para todo $k \neq k'$
$$< u_{2k}, u_{2k'} >= \int_0^{2\pi} u_{2k} u_{2k'} \, dx = \int_0^{2\pi} sen(kx) sen(k'x) \, dx = 0.$$
- Para todo $k \neq k'$
$$< u_{2k-1}, u_{2k'-1} >= \int_0^{2\pi} u_{2k-1} u_{2k'-1} \, dx = \int_0^{2\pi} cos(kx) cos(k'x) \, dx = 0.$$
- Para todo $k = 1, 2, \cdots, n$ y $k' = 1, 2, \cdots, n$
$$< u_{2k}, u_{2k'-1} >= \int_0^{2\pi} u_{2k} u_{2k'-1} \, dx = \int_0^{2\pi} sen(kx) cos(k'x) \, dx = 0.$$
Para todo $k = 1, \cdots, n$ se tiene:
$$< u_0, u_{2k} >= \int_0^{2\pi} u_0 u_{2k} \, dx = \int_0^{2\pi} sen(kx) \, dx = 0.$$
de la misma forma que arriba:
$$< u_0, u_{2k-1} >= \int_0^{2\pi} u_0 u_{2k-1} \, dx = \int_0^{2\pi} cos(kx) \, dx = 0.$$
Lo que termina la demostración de la proposición.

Entonces se observa que el conjunto $\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{2n}\}$ es ortogonal. Para normalizarlo es suficiente dividir cada vector entre su norma. En la demostración de la proposición las normas fueron obtenidas como sigue

$$\|u_0\| = \sqrt{< u_0, u_0 >} = \sqrt{2\pi}$$

y para todo $k = 1, 2, \cdots, n$

$$\|u_{2k}\| = \sqrt{< u_{2k}, u_{2k} >} = \sqrt{\pi},$$

$$\|u_{2k-1}\| = \sqrt{< u_{2k-1}, u_{2k-1} >} = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

OBSERVACIÓN 1.27 *Sea $f \in C[0, 2\pi]$, la aproximación óptima de f a W esta dada por la proyección ortogonal de f sobre W como sigue:*

$$
\begin{aligned}
f_n &= \sum_{k=0}^{n}\Big(< f, u_{2k} > \frac{u_{2k}}{||u_{2k}||^2}\Big) + \sum_{k=1}^{n}\Big(< f, u_{2k-1} > \frac{u_{2k-1}}{||u_{2k-1}||^2}\Big) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\Big)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)\, dx,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sen(kx)\, dx.$$

a_k y b_k se llaman los coeficientes de Fourier.

EJEMPLO 1.40 *Sea $E = C[-\pi, \pi]$ y $W = Vect\,\{1, cos(x), sen(x)\}$.*

1. *Verifique que $B = \{1, cos(x), sen(x)\}$ es una base de W.*
2. *Deduzca de B una base ortonormal B' de W.*
3. *Sea $f \in E$, exprese la proyección óptima de f sobre W en términos de B'. Si $f = x$ encuentre explícitamente $P_W(f)$.*

Solución.

1. Como $B = \{1, cos(x), sen(x)\}$ genera a W, entonces es suficiente probar que los vectores de B son l.i. Sean $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha + \beta cos(x) + \lambda sen(x) = 0$$

Para valores de $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, la ecuación anterior nos lleva al siguiente sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta cos(0) + \lambda sen(0) = 0 \\ \alpha + \beta cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lambda sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \alpha + \beta cos(\pi) + \lambda sen(\pi) = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \lambda = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{array}\right.$$

Por lo tanto los vectores de B son l.i y B es una base de W.

2. Como

$$\begin{aligned} < 1, cos(x) > &= \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)\, dx \\ &= sen(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < 1, sen(x) > &= \int_{-\pi}^{\pi} sen(x)\, dx \\ &= -cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < cos(x), sen(x) > &= \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)sen(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}sen^2(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces B es una base ortogonal. Además

$$||1|| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{2\pi}$$

$$||cos(x)|| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(x)\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

$$||sen(x)|| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} sen^2(x)\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{\pi}$$

entonces una base ortonormal de W esta dada por:

$$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(x)\right\}$$

3. •

$$\begin{aligned} P_W(f) &= < f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(x) > \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(x) \\ &+ < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(x) > \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(x) \end{aligned}$$

-

$$
\begin{aligned}
P_W(f) &= \frac{1}{2\pi} < x, 1 > + \frac{1}{\pi} < x, cos(x) > cos(x) \\
&+ \frac{1}{\pi} < x, sen(x) > sen(x)
\end{aligned}
$$

Los productos internos en la expresión anterior se calculan como sigue:

$$
< x, 1 >= \int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
< x, cos(x) > &= \int_{-\pi}^{\pi} xcos(x)\,dx \\
&= xsen(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} sen(x)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< x, sen(x) > &= \int_{-\pi}^{\pi} xsen(x)\,dx \\
&= -xcos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} cos(x)\,dx \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
P_W(f) = 2sen(x).
$$

$\square$

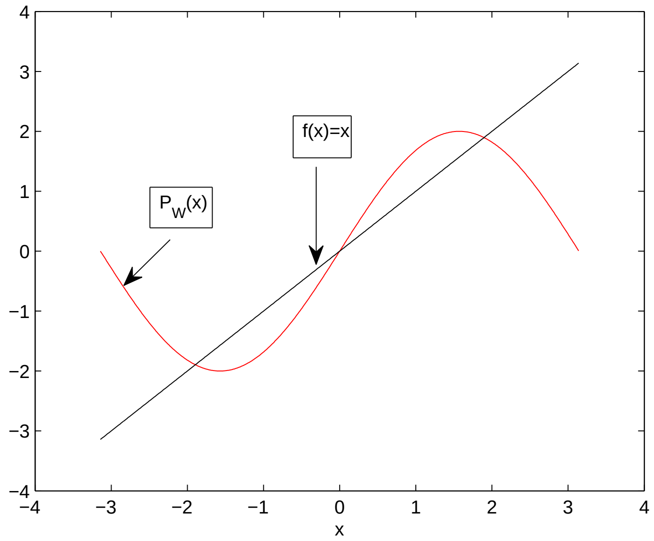

Figura 1.1: La función $f(x) = x$ y su aproximación $P_W(x)$

EJEMPLO 1.41 *Sea $E = C[0, 2\pi]$ y sea W un subespacio vectorial de E dado por $W = Vect\,\{1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x)\}$.*

1. *¿Es $B = \{1, cos(x), sen(x), cos(2x), sen(2x)\}$ una base de W?*

2. *Encuentre la mejor aproximación de la función $f(x) = e^x$ en el subespacio vectorial W.*

Solución.

1. Como B genera a W, entonces s suficiente probar que los vectores de B son l.i. En efecto sea $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 cos(x) + \alpha_3 sen(x) + \alpha_4 cos(2x) + \alpha_5 sen(2x) = 0$$

La expresión anterior es valida para cualquier $x \in [0, 2\pi]$, entonces evaluándola en valores convenientes de $x = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$ se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 cos(0) + \alpha_3 sen(0) + \alpha_4 cos(0) + \alpha_5 sen(0) = 0 \\ \\ \alpha_1 + \alpha_2 cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \alpha_3 sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \alpha_4 cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \alpha_5 sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \\ \alpha_1 + \alpha_2 cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \alpha_4 cos\left(\pi\right) + \alpha_5 sen\left(\pi\right) = 0 \\ \\ \alpha_1 + \alpha_2 cos\left(\pi\right) + \alpha_3 sen\left(\pi\right) + \alpha_4 cos(2\pi) + \alpha_5 sen(2\pi) = 0 \\ \\ \alpha_1 + \alpha_2 cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \alpha_3 sen\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + \alpha_4 cos(3\pi) + \alpha_5 sen(3\pi) = 0 \end{cases}$$

El sistema lineal anterior queda como sigue:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_3 \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_5 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

La representación matricial del sistema lineal anterior está dada por:

$$A\alpha = 0$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$$

Como $det(A) = 8 \neq 0$ entonces la inversa de A existe lo que implica que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$$

Entonces B es l.i y por lo tanto B es una base de W.

2. Utilizando la expresión dada por (1.11) se tiene:

$$P_W(e^x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2} \Big(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\Big)$$

en donde:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}e^x\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}.$$

Para $k = 1, 2$ se utiliza la formula de Integración por partes y se obtiene:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cos(kx)\,dx \\
&= \left(\frac{ke^x sen(kx)}{k^2+1} + \frac{e^x cos(kx)}{k^2+1}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)} \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sen(kx)\,dx \\
&= \left(\frac{ke^x sen(kx)}{k^2+1} - \frac{ke^x cos(kx)}{k^2+1}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \frac{k(1-e^{2\pi})}{\pi(k^2+1)}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
P_W(e^x) &= \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{e^{2\pi}-1}{\pi(k^2+1)}cos(kx) + \frac{k(1-e^{2\pi})}{\pi(k^2+1)}sen(kx)\right) \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{cos(kx)}{k^2+1} - \frac{ksen(kx)}{k^2+1}\right)\right) \\
&= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(x) - \frac{1}{2}sen(x) + \frac{1}{5}cos(2x) - \frac{2}{5}sen(2x)\right)
\end{aligned}$$

□

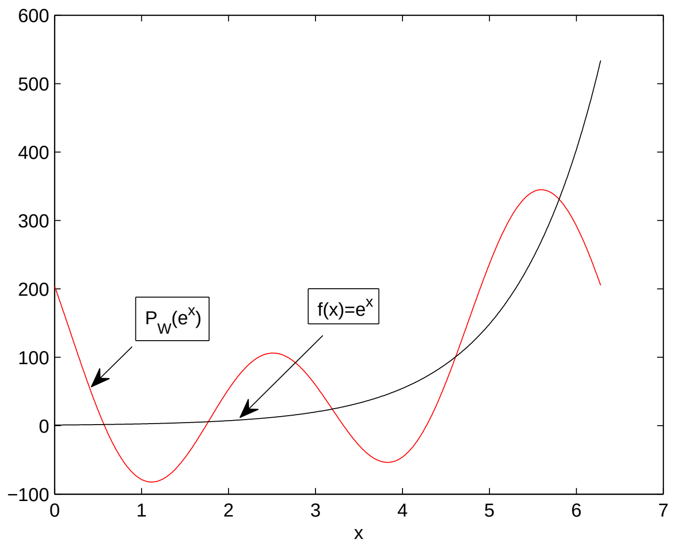

Figura 1.2: La función $f(x) = e^x$ y su aproximación $P_W(e^x)$

Observación 1.28 *Un criterio para demostrar la independencia lineal de un conjunto de funciones con ciertas propiedades de regularidad (derivabilidad) es mediante el concepto llamado Wronskiano, además el Wronskiano es de gran importancia en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales.*

Capítulo 2

Transformaciones Lineales

DEFINITION 2.1 *Sean V y W espacios vectoriales. Se dice que una función:*

$$T : V \longrightarrow W$$

es una transformación lineal si satisface lo siguiente:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ *para todo* $u, v \in V$.
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y* $u \in V$.

EJEMPLO 2.1 *Pruebe que las siguientes transformaciones son lineales:*

1. $$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & W \\ u & \longmapsto & T(u) = 0 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & V \\ u & \longmapsto & T(u) = u \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcl} T : V & \longrightarrow & V \\ u & \longmapsto & T(u) = ku \end{array}$$

   donde k es una constante en $\mathbb{R}$.

4.

$$\begin{aligned} T:\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto T(x)=Ax \end{aligned}$$

A es una matriz en $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

5.

$$\begin{aligned} T:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto T(x,y)=(2x-y,x+y,2x+3y) \end{aligned}$$

Solución. Para probar que T es una transformación lineal, en cada caso se tiene que probar que T cumple con las dos condiciones dadas en la Definición 2.1.

1. $T(u)=0$ representa la transformación cero. Ahora se verifican las condiciones de la Definición 2.1.

   - Para todo $u,v\in V$ se tiene:

     $$T(u+v)=0=T(u)+T(v).$$

   - Para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ y $u\in V$ se tiene:

     $$T(\lambda u)=0=\lambda T(u)$$

2. $T(u)=u$ representa la transformación Identidad.

   - Para todo $u,v\in V$ se tiene:

     $$T(u+v)=u+v=T(u)+T(v).$$

   - Para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ y $u\in V$ se tiene:

     $$T(\lambda u)=\lambda u=\lambda T(u)$$

3. $T(u)=ku$ representa la transformación Homotecia:

- Para todo $u, v \in V$ se tiene:

$$T(u+v) = k(u+v) = ku + kv = T(u) + T(v).$$

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in V$ se tiene:

$$T(\lambda u) = k\lambda u = \lambda k u = \lambda T(u)$$

4. La transformación $T(x) = Ax$ es una transformación lineal, en efecto:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)$$

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A x = \lambda T(x)$$

5. La transformación $T(x, y) = (2x - y, x + y, 2x + 3y)$ es una transformación lineal, en efecto:

- Sean $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Se observa que:
$$\begin{aligned} T(u+v) &= (2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), \\ &\quad 2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2)) \end{aligned}$$
Por lo tanto:

$$T(u+v) = (2x_1 - y_1, x_1 + y_1, 2x_1 + 3y_1) + (2x_2 - y_2, x_2 + y_2, 2x_2 + 3y_2)$$

y

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda x, \lambda y) \\ &= (2\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y, 2\lambda x + 3\lambda y) \\ &= \lambda(2x - y, x + y, 2x + 3y) \\ &= \lambda T(x, y) = \lambda T(u) \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumplen las dos condiciones de la Definición 2.1. □

Observación 2.1 *Para probar que una transformación T no es lineal es suficiente que no se cumpla una de las propiedades de la Definición 2.1. Por ejemplo las siguientes transformaciones no son lineales:*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & T(x, y) = xy \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} T: & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & T(A) = det(A) \end{array}$$

Observación 2.2 *Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces para todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in V$, se tiene:*

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \tag{2.1}$$

Generalmente para todo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ se tiene:

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \cdots + \lambda_n T(v_n)$$

Por el hecho anterior se dice que la transformación lineal preserva la combinación lineal. Además, se observa que la expresión dada por (2.1) *se puede adoptar como una Definición equivalente a la dada por la Definición 2.1.*

Ejercicio 2.1 *Utilizando la Definición 2.1 pruebe si son ó no lineales las siguientes transformaciones:*

1. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (2x - y, x + y, x + 5y)$.

2. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (5x - y, 1, x + 7y)$.

3. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x - y, xy)$.

4. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ T(x, y) = \|(x, y)\|$.

5. $T : C[-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ T(f) = f^2(0)$.

TEOREMA 2.1 *Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entonces se tiene lo siguiente:*

1. $T(0) = 0$

2. $T(-v) = -T(v)$ *para todo* $v \in V$

3. $T(v - w) = T(v) - T(w)$ *para todo* $v, w \in W$

Demostración.

1. Sabemos que $0v = 0$ para todo $v \in V$ entonces como f es una transformación lineal se toma $\lambda = 0$ en la Definición 2.1, por lo tanto:

$$T(0) = T(0v) = 0T(v) = 0$$

2. $T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$ para todo $v \in V$

3. $T(v - w) = T(v + (-1)w) = T(v) + (-1)T(w) = T(v) - T(w)$ para todo $v, w \in V$

$\square$

DEFINITION 2.2 *Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El Kernel ó Núcleo de T es el conjunto de vectores $v \in V$ dado por:*

$$Ker(T) = \{v \in V \ tal\ que\ T(v) = 0\}$$

Definition 2.3 *Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. El Recorrido ó Imagen de T es el conjunto de vectores $w \in W$ que son imagen de al menos un vector $v \in V$. La Imagen de T se denota como:*

$$Im(T) = \{w \in W \text{ tal que } w = T(v) \text{ para algún} v \in V\}$$

Teorema 2.2 *Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces:*

1. *$Ker(T)$ es un subespacio vectorial de V.*

2. *$Im(T)$ es un subespacio vectorial de W.*

Demostración.

1.
   - Por el Teorema 2.1 se tiene que $f(0) = 0$ por lo tanto $0 \in Ker(T)$.
   - Sean $u, v \in Ker(T)$ entonces:

     $$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0$$

     lo que implica que $u + v \in Ker(T)$.
   - Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in Ker(T)$ entonces:

     $$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda 0 = 0$$

     lo que implica que $\lambda v \in Ker(T)$. Por lo tanto $Ker(T)$ es un subespacio vectorial de V.

2.
   - Como $f(0) = 0$ entonces $0 \in Im(T)$.
   - Sean $w_1, w_2 \in Im(T)$ entonces existen $v_1, v_2 \in V$ tal que:

     $$f(v_1) = w_1 \text{ y } f(v_2) = w_2$$

Como T es una transformación lineal se tiene:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

lo que implica que $w_1 + w_2 \in Im(T)$.

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in Im(T)$. Como $w \in Im(T)$ entonces existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Ahora

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda w$$

lo demuestra que $\lambda w \in Im(T)$. Finalmente $Im(T)$ es un subespacio vectorial de W.

$\square$

EJEMPLO 2.2 *Pruebe que las siguientes transformaciones son lineales y encuentre Núcleo e Imagen en cada caso:*

1.
$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x, x+y) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x-2y, y+3z) \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \\ & p & \longmapsto & T(p) = xp(x) + p'(x) \end{array}$$

Solución.

1. - Sean $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} T(u+v) & = & T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ & = & (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) \\ & = & (x_1, x_1 + y_1) + (x_2, x_2 + y_2) \\ & = & T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ & = & T(u) + T(v) \end{array}$$

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda x, \lambda y) \\ &= (\lambda x, \lambda x + \lambda y) \\ &= \lambda(x, x + y) \\ &= \lambda T(x, y) \\ &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

  Como T cumple con las dos propiedades de la Definición 2.1 entonces T es una transformación lineal.

El Núcleo de T está definido como:

$$Ker(T) = \left\{u \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } T(u) = 0\right\}$$

es decir, se busca el conjunto de $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = 0$, lo que implica:

$$(x, x + y) = (0, 0)$$

entonces $x = y = 0$, por lo tanto $Ker(T) = \{0\}$.
La Imagen de T esta definida como el conjunto de todo $w = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ tal que existe $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $T(x, y) = (x', y') = (x, x+y)$. En este caso $Im(T) = \mathbb{R}^2$ pues, siempre se puede tomar $x = x'$ y $y = y' - x'$.

2. - Sean $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ entonces:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2 - 2(y_1 + y_2), y_1 + y_2 + 3(z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 - 2y_1, y_1 + 3z_1) + (x_2 - 2y_2, y_2 + 3z_2) \\ &= T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned}$$

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ entonces:

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x - 2\lambda y, \lambda y + 3\lambda z) \\ &= \lambda(x - 2y, y + 3z) \\ &= \lambda T(x, y, z) \\ &= \lambda T(u) \end{aligned}$$

Lo que prueba que T es una transformación lineal.
El Núcleo de T se reduce a buscar el conjunto de todos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación:

$$T(x, y, z) = (0, 0)$$

es decir, $(x - 2y, y + 3z) = (0, 0)$ ó bien el siguiente sistema lineal homogéneo:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

Se observa que el sistema anterior tiene una infinidad de soluciones dadas por $y = -3z$ y $x = -6z$, es decir, $(x, y, z) = z(-6, -3, 1)$ para todo $z \in \mathbb{R}$, por lo tanto el Núcleo de T queda como sigue:

$$Ker(T) = Vect\{(-6, -3, 1)\}$$

Respecto a la Imagen de T se busca el conjunto $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tal que exista $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $T(x, y, z) = (x', y')$, es decir las $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen el siguiente sistema lineal;

$$\begin{cases} x - 2y = x' \\ y + 3z = y' \end{cases}$$

El sistema anterior tiene una infinidad de soluciones por lo tanto $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

3. • Sean $p, q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ entonces:

$$\begin{aligned} T(p+q) &= x(p+q)+(p+q)' \\ &= xp+p'+xq+q' \\ &= T(p)+T(q) \end{aligned}$$

• Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ entonces:

$$\begin{aligned} T(\lambda p) &= x\lambda p+(\lambda p)' \\ &= \lambda xp+\lambda p' \\ &= \lambda T(p) \end{aligned}$$

Por lo tanto T es una transformación lineal.

El Núcleo de T es el conjunto de todos los polinomios $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ en $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(p) = 0$, es decir:

$$xp+p' = 0$$

$\Longrightarrow$

$$x(a_0+a_1x+a_2x^2)+a_1+2a_2x = 0$$

$\Longrightarrow$

$$a_1+(a_0+2a_2)x+a_1x^2+a_2x^3 = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_0+2a_2 = 0 \Longrightarrow a_0 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

lo que implica que $p = 0$, por lo tanto $Ker(T) = \{0\}$.

La Imagen de T es el conjunto de todos los polinomios $q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ tal que existe $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ con $T(p) = q$. Consideramos $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ entonces:

$$\begin{aligned} T(p) &= xp+p' \\ &= x(a_0+a_1x+a_2x^2)+a_1+2a_2x \\ &= a_0x+a_1(1+x^2)+a_2(2x+x^3) \end{aligned}$$

Lo que demuestra que q es una combinación lineal de $\{x, 1+x^2, 2x+x^3\}$ por lo tanto:

$$Im(T) = Vect\left\{x, 1+x^2, 2x+x^3\right\}$$

$\square$

DEFINITION 2.4 *Una función $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva (uno a uno) si se cumple lo siguiente:*

$$\forall\ x, y \in X\ \ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

EJEMPLO 2.3 *las funciones $f(x) = x, g(x) = x^3$ son inyectivas*

OBSERVACIÓN 2.3 *Geométricamente una recta horizontal cruza una función inyectiva en un solo punto de lo contrario sera no inyectiva. Por ejemplo la función $f(x) = x^2$ es no inyectiva, pues una recta horizontal la cruza en dos puntos.*

LEMA 2.1 *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces:*

$$T \text{ es inyectiva si y solo si } Ker(T) = \{0\}$$

EJERCICIO 2.2 *Pruebe que las siguientes transformaciones son lineales y verifique si son inyectivas.*

1. $$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (2x, x-y, 0) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rccl} T: & \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \\ & p(x) & \longmapsto & T(p) = p'(x) \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rcl} T: \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & T(A) = A' \end{array}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que T es inyectiva y sea $x \in Ker(T)$ entonces:

$$T(x) = 0 = T(0)$$

Como T es inyectiva se tiene que $x = 0$ por lo tanto $Ker(T) = \{0\}$.
$\Longleftarrow$) Supongamos que $Ker(T) = \{0\}$. Sean $x, y \in V$ tal que:

$$T(x) = T(y)$$

entonces $T(x - y) = 0$ por lo tanto $x - y \in Ker(T)$. Como $Ker(T) = \{0\}$ entonces $x - y = 0$ y finalmente $x = y$ lo que demuestra que T es inyectiva.
□

Definition 2.5 *Sean V y W espacios vectoriales. Dada una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, la dimensión del Kernel de T se llama nulidad y la dimensión de la Imagen de T se llama rango de T.*

El siguiente Teorema relaciona la nulidad de una transformación lineal T con su rango.

Teorema 2.3 *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Supongamos que $dim\, V = n$, entonces:*

$$nulidad(T) + rango(T) = n$$

Demostración. **1$^{\text{er}}$ Caso**. Supongamos que la $nulidad(T) = 0$, entonces $Ker(T) = \{0\}$. El Lema 2.1 implica que T es inyectiva. Ahora sea $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ una base de V, entonces $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ es base de $Im(T)$. En efecto, $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ son l.i, pues para todo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \cdots + \lambda_n T(u_n) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n) = 0$$

Como T es inyectiva entonces:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

Ahora utilizando el hecho de que B es una base de V se tiene que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

lo que prueba que $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ son l.i. Falta demostrar que $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ genera a $Im(T)$. Sea $w \in Im(T)$ entonces existe $v \in V$ tal que:

$$T(v) = w$$

Como $v \in V$ y B es una base de V entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

y:

$$\begin{aligned} w &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_n T(u_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ es una base de $Im(T)$ y finalmente $rango(T) = n$. Además:

$$nulidad(T) + rango(T) = n$$

2$^{\text{do}}$ Caso. Supongamos que $rango(T) = 0$ entonces $Im(T) = \{0\}$ lo que implica que

$$T(v) = 0 \text{ para todo } v \in V$$

es decir que $Ker(T) = V$ por lo tanto $nulidad(T) = dimV = n$ lo que demuestra el hecho dado en el Teorema en este caso.

3^er Caso. Supongamos que $nulidad(T) \neq 0$ y $rango(T) \neq 0$. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ una base de $Ker(T)$. Para demostrar el hecho dado por el Teorema es suficiente demostrar que $Im(T)$ tiene dimensión $n-r$. Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ son l.i sabemos que existen $v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n \in V$ tal que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V. Ahora demostramos que $B' = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \cdots, T(v_n)\}$ es una base $Im(T)$. $\{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \cdots, T(v_n)\}$ son l.i. En efecto, sean $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

entonces:

$$T(\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$$

lo que implica que

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n \in Ker(T)$$

Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ una base de $Ker(T)$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r$$

y

$$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \alpha_{r+2}v_{r+2} + \cdots + \alpha_n v_n - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_r v_r = 0$$

Como $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es base entonces:

$$\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_n = 0$$

Por lo tanto $B' = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \cdots, T(v_n)\}$ es l.i. Ahora falta demostrar que B' genera a $Im(T)$. Sea $w \in Im(T)$ entonces existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Como $v \in V$ entonces existen $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$$

y

$$\begin{aligned} w &= T(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n) \\ &= \mu_1 T(v_1) + \mu_2 T(v_2) + \cdots + \mu_n T(v_n) \\ & \mu_{r+1} T(v_{r+1}) + \mu_{r+2} T(v_{r+2}) + \cdots + \mu_n T(v_n) \end{aligned}$$

El paso anterior se debe a que

$$\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset Ker(T)$$

Finalmente $B' = \{T(v_{r+1}), T(v_{r+2}), \cdots, T(v_n)\}$ es una base $Im(T)$ lo que demuestra que:

$$nulidad(T) + rango(T) = r + n - r = n = dimV$$

□

Ejercicio 2.3 *Verifique que el hecho del Teorema 2.3 se cumple para cada transformación lineal dada en el Ejemplo 2.2.*

Corolario 2.1 *Sea V un espacio vectorial con dimensión finita. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es inyectiva*
2. *$Ker(T) = \{0\}$*
3. *$nulidad(T) = 0$*
4. *$rango(T) = dimV$*

Ejercicio 2.4 *Se considera la transformación:*

$$T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que:

$$T(p(x)) = (p(0), p(1)).$$

1. *Pruebe que T es una transformación lineal.*

2. *Encuentre $Ker(T), Im(T), nulidad(T)$ y $rango(T)$.*

EJERCICIO 2.5 *Sea:*

$$T: \quad \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2,$$

tal que:

$$T(\alpha + \beta x + \lambda x^2) = (\alpha - \beta, \beta + \lambda) \text{ para todo } \alpha, \beta\,, \lambda \text{ en } \mathbb{R}.$$

1. *Pruebe que T es una transformación lineal.*

2. *Encuentre $Ker(T), Im(T), nulidad(T)$ y $rango(T)$.*

EJERCICIO 2.6 *Sea:*

$$\begin{array}{rccc} T: & C^2\,[0,\infty) & \longrightarrow & C^1\,[0,\infty) \\ & f & \longmapsto & \mathscr{D}^2 f - 5\mathscr{D} f + \dfrac{25}{4} f. \end{array}$$

1. *Pruebe que T es una transformación lineal.*

2. *Encuentre una base de $Ker(T)$ y su dimensión.*

2.1. La Representación Matricial

2.1.1. Motivación

En esta sección se da una representación matricial de una transformación lineal:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & T(x) \end{array} \tag{2.2}$$

Sea $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base estándar o canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir:

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

Observando que para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ se tiene que $T(e_i) \in \mathbb{R}^m$ entonces:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, T(e_2) = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, T(e_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$$

además,

$$\begin{aligned} T(x) &= x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \\ &= \begin{pmatrix} x_1\alpha_{11} \\ x_1\alpha_{21} \\ \vdots \\ x_1\alpha_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2\alpha_{12} \\ x_2\alpha_{22} \\ \vdots \\ x_2\alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} x_n\alpha_{1n} \\ x_n\alpha_{2n} \\ \vdots \\ x_n\alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \cdots + x_n\alpha_{1n} \\ x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \cdots + x_n\alpha_{2n} \\ \vdots \\ x_1\alpha_{m1} + x_2\alpha_{m2} + \cdots + x_n\alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente se deduce que:

$$T(x) = M_T x$$

donde

$$M_T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN 2.4 *1. A la matriz M_T se le llama la representación matricial de la transformación lineal T.*

2. La matriz M_T se obtiene al expresar los vectores $T(e_1), T(e_2), \cdots, T(e_n)$ en la base de $\mathbb{R}^m$ y finalmente representarlos como columnas de M_T.

EJEMPLO 2.4 *Encuentre la representación matricial de cada una de las siguientes transformaciones lineales:*

1.

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+y, 2x-y) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & T(x,y,z) = (x+y, x-y, z, y) \end{array}$$

Solución.

1. La base canónica de $\mathbb{R}^2$ está dada por $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$. Entonces:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La representación matricial de T está dada por:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se observa que:

$$M_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $T(x,y) = (x+y, 2x-y)$.

2. La base canónica de $\mathbb{R}^3$ está dada por $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. Entonces:

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Además

$$M_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$T(x,y,z) = (x+y, x-y, z, y)$$

$\square$

Observación 2.5 *Si $m = 1$ en (2.2) entonces a M_T se le llama la representación covectorial de T.*

El mismo procedimiento dado arriba para encontrar la representación matricial de una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ se puede extender para encontrar la representación matricial de una transformación lineal de un espacio vectorial V con base $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ a otro espacio vectorial W con base $B' = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$.En esta sección se generaliza el concepto de la representación matricial a cualquier espacio vectorial de dimensión finita.

2.1.2. La Representación matricial en un espacio vectorial

Definition 2.6 (Representación Matricial de un operador lineal) *Sean $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de V tal que:*

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \cdots + \alpha_{1n}v_n \\ T(v_2) & = & \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{2n}v_n \\ & \vdots & \\ T(v_n) & = & \alpha_{n1}v_1 + \alpha_{n2}v_2 + \cdots + \alpha_{nn}v_n \end{array}$$

Entonces la representación matricial de T está dada por:

$$[T]_B = M_T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 2.4 *Sean $T : V \longrightarrow V$ y B una base de V. Entonces para todo $u \in V$ se tiene*

$$[T(u)]_B = [T]_B[u]_B$$

donde $[T(u)]_B$ y $[u]_B$ son respectivamente la representación de $T(u)$ y u respecto a la base B.

Ejemplo 2.5 *Sea*

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \\ & p & \longmapsto & T(p) = p'(x) \end{array}$$

1. *Encuentre la representación matricial de T respecto a la base canónica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.*

2. *Utilizando la representación matricial de T encuentre $T(q(x))$ dónde $q(x) = 11 - 5x - 7x^2 + 4x^3$.*

Solución.

1. $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es la base canónica de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Calculando T en cada vector de B se tiene:

$$T(1) = 0,\ T(x) = 1,\ T(x^2) = 2x \text{ y } T(x^3) = 3x^2.$$

Entonces la representación matricial de T queda como sigue:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Por el Teorema 2.4 se tiene:

$$[T(q(x))]_B = [T]_B[q]_B$$

Como $[q]_B = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$. entonces:

$$[T(q)]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$[T(q(x))]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto:

$$T(q) = -5 - 14x + 12x^2$$

lo ultimo coincide con q' cuando se calcula directamente.

$\square$

2.1.3. Matriz cambio de base

Supongamos que $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ son bases del mismo espacio vectorial V. Sea $u \in V$

$$[u]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

es decir:

$$u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$$

como los $w_i's$ son elementos de V entonces se pueden expresar como combinación lineal de los elementos de la base B como sigue:

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ &\vdots \\ w_n &= a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{aligned}$$

El siguiente paso es expresar a u como combinación lineal de los elementos de B.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n \\ &= \alpha_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n) \\ &\quad +\alpha_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n) \\ &\quad \vdots \\ &\quad +\alpha_n(a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n) \end{aligned}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_n a_{n1})v_1 \\ &\quad + (\alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{n2})v_2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_n a_{nn})v_n \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} [u]_B &= \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \cdots + \alpha_n a_{n1} \\ \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{n2} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \cdots + \alpha_n a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pongamos:

$$P_{B',B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces se puede observar que:

$$[u]_B = P_{B',B}[u]_{B'}$$

TEOREMA 2.5 *Sean* $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *y* $B' = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ *bases del mismo espacio vectorial* V. *Sean* $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ w_2 & = & a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ & \vdots & \\ w_n & = & a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{array}$$

y sea

$$P_{B',B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Entonces $P_{B',B}$ *es invertible y para todo* $u \in V$ *se tiene:*

1. $[u]_B = P_{B',B}[u]_{B'}$.

2. $[u]_{B'} = (P_{B',B})^{-1}[u]_B$.

DEFINITION 2.7 *[Matriz Cambio De Base] Sean* B *y* B' *bases de un espacio vectorial* V. *Entonces:*

1. $P_{B',B}$ *se llama matriz cambio de base de* B' *a* B.

2. $P_{B,B'} = (P_{B',B})^{-1}$ *se llama la matriz cambio de base de* B *a* B'.

EJEMPLO 2.6 *Sean:*
$B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *y* $B' = \{w_1 = (1,1), w_2 = (-1,0)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$.

1. *Encuentre las matrices cambio de base* $P_{B',B}$ *y* $P_{B,B'}$.

2. Sea $u=(-4,3)$. Encuentre $[u]_{B'}$.

Solución.

1. - Para encontrar $P_{B',B}$ es suficiente representa los vectores de B' en la base B como sigue:

$$\begin{array}{rcl} w_1 & = & (1,1)=(1,0)+(0,1)=e_1+e_2 \\ w_2 & = & (-1,0)=-(1,0)+0(0,1)=-e_1+0e_2 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$P_{B',B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Para encontrar $P_{B,B'}$ sabemos por la Definición 2.7 que

$$P_{B,B'}=(P_{B',B})^{-1}$$

entonces es suficiente encontrar la inversa de la matriz $P_{B',B}$. Utilizando el método de Gauss-Jordan se tiene:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$P_{B,B'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Por el Teorema 2.5 se tiene:

$$\begin{array}{rcl} [(-4,3)]_{B'} & = & P_{B,B'}[(-4,3)]_B \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por lo tanto:

$$(-4,3) = 3w_1 + 7w_2 = 3(1,1) + 7(-1,0).$$

$\square$

EJEMPLO 2.7 *Sea $E = \mathbb{R}^3$. B y B' bases de $\mathbb{R}^3$ dadas por:*

$$\begin{aligned} B &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ B' &= \{(1,1,0),(-1,2,-1),(3,-1,2)\} \end{aligned}$$

1. *Encuentre las matrices cambio de base $P_{B',B}$ y $P_{B,B'}$.*

2. *Si $u = (1,4,5)$. Encuentre $[u]_{B'}$.*

Solución.

1. • Pongamos

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

$$w_1 = (1,1,0), w_2 = (-1,2,-1), w_3 = (3,-1,2)$$

Se observa que los vectores de B' se representan en B como sigue:

$$\begin{aligned} w_1 = (1,1,0) &= (1,0,0) + (0,1,0) \\ &= e_1 + e_2 + 0e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 = (-1,2,-1) &= -(1,0,0) + 2(0,1,0) - (0,0,1) \\ &= -e_1 + 2e_2 - e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 = (3,-1,2) &= 3(1,0,0) - (0,1,0) + 2(0,0,1) \\ &= 3e_1 - e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

Entonces:

$$P_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $P_{B,B'} = (P_{B',B})^{-1}$. En efecto,

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3R_3+R_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/2)R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+4R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{(1/3)R_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-3R_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Finalmente,

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

2. Por el Teorema 2.5 se tiene:

$$[u]_{B'} = P_{B,B'}[u]_B$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
[(1,4,5)]_{B'} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -13 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto:

$(1,4,5) = -13w_1 + 8w_2 + 9w_3 = -13(1,1,0) + 13(-1,2,-1) + 9(3,-1,2).$

□

EJEMPLO 2.8 *Sean $B = \{1, x\}$ y $B' = \{3, 5-2x\}$ bases de $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$.*

1. *Encuentre las matrices cambio de base $P_{B',B}$ y $P_{B,B'}$.*
2. *Si $p(x) = 7 - 13x$. Encuentre $[p(x)]_{B'}$ y exprese $p(x)$ como combinación lineal de los elementos de B'.*

Solución.

1. • Pongamos $v_1 = 1, v_2 = x$ y $w_1 = 3, w_2 = 5-2x$. Entonces:

$$w_1 = 3 = 3(1) + 0(x)$$

y

$$w_2 = 5 - 2x = 5(1) - 2(x)$$

Por lo tanto:

$$P_{B',B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- $P_{B,B'} = (P_{B',B})^{-1}$ entonces por el método de Gauss-Jordan se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/3)R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-1/2)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-(5/3)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Finalmente,

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. - Por el Teorema 2.5 se tiene:

$$\begin{aligned} [p(x)]_{B'} &= [7-13x]_B \\ &= P_{B,B'}[7-13x]_B \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{51}{6} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $p(x) = 7 - 13x$ se expresa en la base B' como sigue:

$$\begin{aligned} 7 - 13x &= -\frac{51}{6}w_1 + \frac{13}{2}w_2 \\ &= -\frac{51}{6}(3) + \frac{13}{2}(5 - 2x) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 2.7 *Sean* $B = \{1, x, x^2\}$ *y* $B' = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

1. *Pruebe que* B *y* B' *son bases de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
2. *Encuentre la matriz cambio de base* $P_{B',B}$.
3. *Utilizando la matriz cambio de base, encuentre la representación de* $p(x) = 1 + 2x - x^2$ *en la base* B'.

Ejercicio 2.8 *Sean*

$$B = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$$

y

$$B' = \left\{-1 + 3x - 2x^2 + 2x^3, 2 - 5x + 4x^2 - 4x^3, -1 + 3x - 3x^2 - 2x^3, 1 - 3x + 2x^2 - x^3\right\}.$$

en $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

1. *Pruebe que* B *y* B' *son bases de* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.
2. *Encuentre la matriz cambio de base* $P_{B',B}$ *y deduzca la matriz cambio de base* $P_{B,B'}$
3. *Utilizando la matriz cambio de base* $P_{B,B'}$ *, encuentre la representación de* $p(x) = 1 - 2x + 5x^2 - 7x^3$ *en la base* B'.

TEOREMA 2.6 *Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. B y B' bases de V. Sean $[T]_B$ y $[T]_{B'}$ la representación matricial de T con respecto a B y B' respectivamente. Entonces se tiene lo siguiente:*

$$[T]_{B'} = P_{B,B'}[T]_B P_{B',B}$$

EJEMPLO 2.9 *Sea*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (3x-4y, 5x+2y) \end{array}$$

una transformación lineal. Sean $B = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B' = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

1. *Encuentre $[T]_B$ y $[T]_{B'}$.*

2. *Encuentre $P_{B',B}$.*

3. *Verifique la igualdad el Teorema 2.6.*

Solución.

1. Pongamos $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$ y $w_1 = (1,1), w_2 = (1,0)$.

   - $$\begin{array}{rcl} T(1,0) & = & (3,5) = 3v_1 + 5v_2 \\ T(0,1) & = & (-4,2) = -4v_1 + 2v_2 \end{array}$$

     y

     $$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   - Para encontrar $[T]_{B'}$ se tiene que representar $T(1,1) = (-1,7)$ y $T(1,0) = (3,5)$ como combinación lineal de los elementos de B', es decir, encontrar los valores de $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tal que:

     $$\begin{array}{rcl} T(1,1) & = & (-1,7) = \alpha(1,1) + \beta(1,0) \\ T(1,0) & = & (3,5) = \alpha'(1,1) + \beta'(1,0) \end{array}$$

lo que implica que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha = 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha' + \beta' = 3 \\ \alpha' = 5 \end{cases}$$

entonces $\alpha = 7, \beta = -8, \alpha' = 5, \beta' = -2$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} T(1,1) &= 7(1,1) - 8(1,0) = 7w_1 - 8w_2 \\ T(1,0) &= 5(1,1) - 2(1,0) = 5w_1 - 2w_2 \end{aligned}$$

Ahora $[T]_{B'}$ queda como sigue:

$$[T]_{B'} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Para encontrar $P_{B',B}$ se tiene que representar los vectores de B' en la base B como sigue:

$$\begin{aligned} &w_1 = (1,1) = (1,0) + (0,1) = v_1 + v_2 \\ &w_2 = (1,0) = v_1 \end{aligned}$$

Entonces $P_{B',B}$ está dada por:

$$P_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Antes de verificar la igualdad del Teorema 2.6 se tiene que encontrar $P_{B,B'}$. Sabemos que $P_{B,B'} = (P_{B',B})^{-1}$ entonces utilizando el método de Gauss Jordan se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

y

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La igualdad del Teorema 2.6 se verifica como sigue:

$$\begin{aligned} P_{B,B'}[T]_B P_{B',B} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \\ &= [T]_{B'} \end{aligned}$$

□

Definition 2.8 *Sean V y W espacios vectoriales con bases respectivamente $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal tal que para $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ se tiene:*

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1m}w_m \\ T(v_2) &= a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2m}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \cdots + a_{nm}w_m \end{aligned}$$

y sea

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.7 *Sean V y W espacios vectoriales con bases B y B' respectivamente. Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces para todo $u \in V$ se tiene:*

$$[T(u)]_{B'} = [T]_{B,B'}[u]_B$$

Ejemplo 2.10 *Sea T una transformación lineal dada por:*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto T(x,y,z) = (x+y+z, 2x+3y-5z) \end{aligned}$$

Sean $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $B' = \{(1,5),(3,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

1. Encuentre $[T]_{B,B'}$.

2. Sea $u = (2, 1, -3)$. *Encuentre* $[T(u)]_{B'}$ *utilizando el Teorema 2.7.*

Solución.

1. Pongamos $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$ y $w_1 = (1, 5), w_2 = (3, 2)$. Para encontrar $[T]_{B,B'}$ se tiene que encontrar las coordenadas de $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ en B'. En efecto,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= T(1,1,1) = (3,0) \\ T(v_2) &= T(1,1,0) = (2,5) \\ T(v_1) &= T(1,0,0) = (1,2) \end{aligned}$$

Ahora se buscan $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta'' \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (3,0) = \alpha(1,5) + \beta(3,2) \\ T(v_2) &= (2,5) = \alpha'(1,5) + \beta'(3,2) \\ T(v_1) &= (1,2) = \alpha''(1,5) + \beta''(3,2) \end{aligned}$$

lo que implica los siguientes sistemas lineales:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 3 \\ 5\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha' + 3\beta' = 2 \\ 5\alpha' + 2\beta' = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha'' + 3\beta'' = 1 \\ 5\alpha'' + 2\beta'' = 2 \end{cases}$$

Resolviendo los sistemas lineales se obtiene:

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{6}{13} \\ \beta = \dfrac{15}{13} \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha' = \dfrac{11}{13} \\ \beta' = \dfrac{5}{13} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \alpha'' = \dfrac{4}{13} \\ \beta'' = \dfrac{3}{13} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= -\frac{6}{13}(1,5) + \frac{15}{13}(3,2) = -\frac{6}{13}w_1 + \frac{15}{13}w_2 \\ T(v_2) &= \frac{11}{13}(1,5) + \frac{5}{13}(3,2) = \frac{11}{13}w_1 + \frac{5}{13}w_2 \\ T(v_3) &= \frac{4}{13}(1,5) + \frac{3}{13}(3,2) = \frac{4}{13}w_1 + \frac{3}{13}w_2 \end{aligned}$$

Finalmente $[T]_{B,B'}$ está dada por:

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} -\dfrac{6}{13} & \dfrac{11}{13} & \dfrac{4}{13} \\ \\ \dfrac{15}{13} & \dfrac{5}{13} & \dfrac{3}{13} \end{pmatrix}$$

2. - Encontrar $[T(2,1,-3)]_{B'}$ quiere decir representar $T(2,1,-3)$ en B'. $T(2,1,-3) = (0,22)$ entonces sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$(0,22) = \alpha(1,5) + \beta(3,2)$$

   lo que implica:

   $$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 5\alpha + 2\beta = 22 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{66}{13} \\ \\ \beta = -\dfrac{22}{13} \end{cases}$$

   Entonces $[T(2,1,-3)]_{B'} = \begin{pmatrix} \dfrac{66}{13} \\ \\ -\dfrac{22}{13} \end{pmatrix}$

   - Utilizando el Teorema 2.7 se tiene:

   $$[T(2,1,-3)]_{B'} = [T]_{B,B'}[(2,1,-3)]_B$$

   En la expresión anterior falta encontrar $[(2,1,-3)]_B$, el cual implica representar $(2,1,-3)$ en la base B, es decir buscar $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$(2,1,-3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \lambda(1,0,1)$$

   La ecuación anterior se reduce al siguiente sistema lineal:

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \lambda = 2 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 4 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

y

$$[(2,1,-3)]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [T(2,1,-3)]_{B'} &= [T]_{B,B'}[(2,1,-3)]_B \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{11}{13} & \frac{4}{13} \\ \\ \frac{15}{13} & \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{66}{13} \\ \\ -\frac{22}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

2.2. Transformación lineal invertible

DEFINITION 2.9 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva si para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

DEFINITION 2.10 *Se dice que una función $f : A \longrightarrow B$ es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva.*

TEOREMA 2.8 *Sea $f : A \longrightarrow B$. Entonces f es invertible, es decir, existe $f^{-1} : B \longrightarrow A$ si es solo si f es biyectiva.*

DEFINITION 2.11 *Sean $T : V \longrightarrow W$ y $\tau : W \longrightarrow X$ transformaciones lineales. La composición τ y T denotada por $\tau \circ T$ está definida como:*

$$\tau \circ T(u) = \tau(T(u)) \text{ para todo } u \in V$$

Definition 2.12 *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal inyectiva. Definimos T^{-1} como:*

$$T^{-1} : Im(T) \longrightarrow V$$

es decir, para todo $w \in Im(T)$ existe $u \in V$ tal que $T(u) = w$.

Teorema 2.9 *Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal inyectiva. Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:*

1. $(T^{-1} \circ T)(u) = u$ *para todo* $u \in V$.
2. $(T \circ T^{-1})(w) = w$ *para todo* $w \in Im(T)$.
3. T^{-1} *es una transformación lineal.*

Teorema 2.10 *Sean V, W y X espacios vectoriales de dimensión finita con bases B, B' y B'' respectivamente. Sean:*

$$T : V \longrightarrow W \ y \ \tau : W \longrightarrow X$$

transformaciones lineales. Entonces se tiene lo siguiente:

$$[\tau \circ T]_{B,B''} = [\tau]_{B',B''}[T]_{B,B'}$$

Ejemplo 2.11 *Sea $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sean*

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x - y, x + 4y) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rrcl} \tau: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & \tau(x, y, z) = (5x - y + 2z, x + y + z) \end{array}$$

1. *Encuentre la regla de correspondencia de* $\tau \circ T$.
2. *Encuentre* $[T]_{B,B'}$, $[\tau]_{B',B}$ *y* $[\tau \circ T]_B$

3. *Deduzca que* $[\tau \circ T]_B = [\tau]_{B',B}[T]_{B,B'}$

Solución.

1.
$$\begin{aligned} \tau \circ T(x,y) &= \tau(T(x,y)) \\ &= \tau(2x+y, x-y, x+4y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tau \circ T(x,y) &= (5(2x+y)-(x-y)+2(x+4y), 2x+y+x-y+x+4y) \\ &= (11x+14y, 4x+4y) \end{aligned}$$

2.
- Encontrar $[T]_{B,B'}$. En efecto,

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (2,1,1) = 2(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1) \\ T(0,1) &= (1,-1,4) = (1,0,0)-(0,1,0)+4(0,0,1) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[T]_{B,B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Encontrar $[\tau]_{B',B}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \tau(1,0,0) &= (5,1) = 5(1,0)+(0,1) \\ \tau(0,1,0) &= (-1,1) = (-1)(1,0)+(0,1) \\ \tau(0,0,1) &= (2,1) = 2(1,0)+(0,1) \end{aligned}$$

$$[\tau]_{B',B} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Encontrar $[\tau \circ T]_{B,B'}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \tau \circ T(1,0) &= (11,4) = 11(1,0)+4(0,1) \\ \tau \circ T(0,1) &= (4,4) = 4(1,0)+4(0,1) \end{aligned}$$

$$[\tau \circ T]_B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Se observa que:

$$\begin{aligned}
[\tau]_{B',B}[T]_{B,B'} &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\
&= [\tau \circ T]_B
\end{aligned}$$

Un hecho confirmado por el Teorema 2.10.

□

Ejercicio 2.9 *Sean*

$$\begin{array}{rrcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x, 2x-y, 3x+4y) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rrcl} \tau: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \tau(x,y,z) = (2x+z, 3y-z, x-y, x+y+z) \end{array}$$

transformaciones lineales. B, B' y B'' son las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

1. *Encuentre $\tau \circ T$.*

2. *Encuentre $[T]_{B,B'}$, $[\tau]_{B',B''}$ y $[\tau \circ T]_{B,B''}$.*

3. *Utilizando la representación matricial $[\tau \circ T]_{B,B''}$ deduzca la regla de correspondencia de $\tau \circ T$.*

Ejercicio 2.10 *Sean:*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x-y, y, x+y) \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rlcl} \tau: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+2z, 2x+2y-z) \end{array}$$

1. *Pruebe que T y τ son transformaciones lineales.*

2. *Encuentre la representación matricial de T y τ.*

3. *Utilizando la representación matricial de T y τ. Deduzca la regla de correspondencia para $\tau \circ T$.*

TEOREMA 2.11 *Sea $T : E \longrightarrow E$ una transformación lineal y sea B una base de E. Entonces las siguientes condiciones son equivalents:*

1. *T es invertible*

2. *La matriz $[T]_B$ es invertible. Además, si se satisface 1 ó 2 se tiene que:*

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$$

EJEMPLO 2.12 *Sea*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+3y) \end{array}$$

una transformación lineal y B la base canónica de T.

1. *Encuentre $[T^{-1}]_B$.*

2. *Deduzca la regla de correspondencia de T^{-1}.*

Solución.

1. Por el Teorema 2.11 sabemos que $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$, es decir, se busca primero $[T]_B$ y luego su inversa. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} T(1,0) & = & (2,1) = 2(1,0) + (0,1) \\ T(0,1) & = & (-1,3) = (-1)(1,0) + 3(0,1) \end{array}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la inversa de $[T]_B$ se utiliza el método de Gauss-Jordan como sigue:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1/2)R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2/7)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + (1/2)R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

Finalmente

$$[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

2. Por el Teorema 2.4 se tiene:

$$[T^{-1}(x,y)]_B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$T^{-1}(x,y) = \left(\frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y, -\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y\right)$$

Es fácil verificar que $T^{-1} \circ T(x,y) = (x,y)$. En efecto,

$$\begin{aligned} T^{-1} \circ T(x,y) &= T^{-1}(2x - y, x + 3y) \\ &= \left(\frac{3}{7}(2x - y) + \frac{1}{7}(x + 3y), -\frac{1}{7}(2x - y) + \frac{2}{7}(x + 3y)\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 2.11 *Sea*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x+2y,4x) \end{array}$$

una transformación lineal y B la base canónica de T.

1. *Encuentre $[T^{-1}]_B$.*

2. *Deduzca la regla de correspondencia de T^{-1}.*

3. *Verifique que $T^{-1}\circ T(x,y)=(x,y)$.*

Ejercicio 2.12 *Sea $W = Vect\,\{e^{2x}, e^{2x}cos(x), e^{2x}sen(x)\}$ un subespacio vectorial de $C(\mathbb{R})$, y sea $\mathscr{D}$ el operador diferencial definido por $\mathscr{D}(p(x)) = p'(x)$ para todo $p \in C(\mathbb{R})$.*

1. *Pruebe que $B = \{e^{2x}, e^{2x}cos(x), e^{2x}sen(x)\}$ es una base de W.*

2. *Pruebe que $\mathscr{D}$ mapea a W en sí mismo.*

3. *Encuentre la representación matricial $[\mathscr{D}]_B$ de $\mathscr{D}$ en B.*

4. *Utilizando la representación matricial $[\mathscr{D}]_B$, encuentre la derivada de $f(x) = 3e^{2x} - e^{2x}cos(x) + 2e^{2x}sen(x)$ y verifique que coincide con $f'(x)$ al calcularla de manera directa.*

5. *Encuentre $[\mathscr{D}^{-1}]_B$ y utilice este hecho para encontrar*

$$\int e^{2x}cos(x) - 2e^{2x}sen(x)\,dx$$

y verifique su resultado.

Ejercicio 2.13 *Sea $W = Vect\,\{cos(x), sen(x), xcos(x), xsen(x)\}$ un subespacio vectorial de $C^1(\mathbb{R})$, y sea $\mathscr{D}$ el operador diferencial definido por:*

$$\mathscr{D}(p(x)) = p'(x)$$

para todo $p \in C^1(\mathbb{R})$.

1. *Pruebe que* $B = \{cos(x), sen(x), xcos(x), xsen(x)\}$ *es una base de* W.

2. *Pruebe que* $\mathscr{D}$ *mapea a* W *en sí mismo.*

3. *Encuentre la representación matricial* $[\mathscr{D}]_B$ *de* $\mathscr{D}$ *en* B.

4. *Utilizando la representación matricial* $[\mathscr{D}]_B$*, encuentre la derivada de* $f(x) = cos(x){+}2xcos(x)$*, y verifique que coincide con* $f'(x)$ *al calcularla de manera directa.*

5. *Encuentre* $[\mathscr{D}^{-1}]_B$ *y utilice este hecho para encontrar* $\displaystyle\int xcos(x){+}xsen(x)\,dx$. *Verifique su resultado.*

Bibliografía

[1] Del Valle, J.C. *Álgebra Lineal Para Estudiantes De Ingeniería Y Ciencias*. Mc Graw Hill.

[2] Grossman, S.I. *Álgebra Lineal*. Mc Graw Hill.

[3] Hadley, G. *Linear Algebra*. Addison- Wesley.

[4] Hoffman, S. *Linear Algebra*. Prentice-Hall.

[5] Williams, G. *Álgebra Lineal Con Aplicaciones*. Mc Graw Hill.